

Раздел 1. Метод моделирования. Основные понятия и определения.

Метод моделирования – это метод изучения свойств определённого объекта-оригинала посредством изучения свойств, другого объекта-модели более удобного для решения задач исследования, и находящегося в определённом соответствии с первым объектом.

При решении практических задач под моделированием понимают изучение моделируемого объекта (оригинала), базирующееся на взаимнооднозначном соответствии определённой части свойств оригинала и замещающего его объекта (модели).

Оригинал – объект, определённые свойства которого подлежат изучению методом моделирования.

Под моделью в общем случае следует понимать: явление, техническое устройство, знаковое образование, или условный образ, которые находятся в определённом соответствии с изучаемым объектом – оригиналом способным заменить оригинал в процессе исследования, давая необходимую информацию.

Таким образом, моделью может быть: экспериментальная установка, наблюдаемое явление, символьное описание (текстовое, математическое, чертежи, схемы и т.п.), мыслимый образ и т.п..

Схема процесса моделирования приведена на рис. 1.

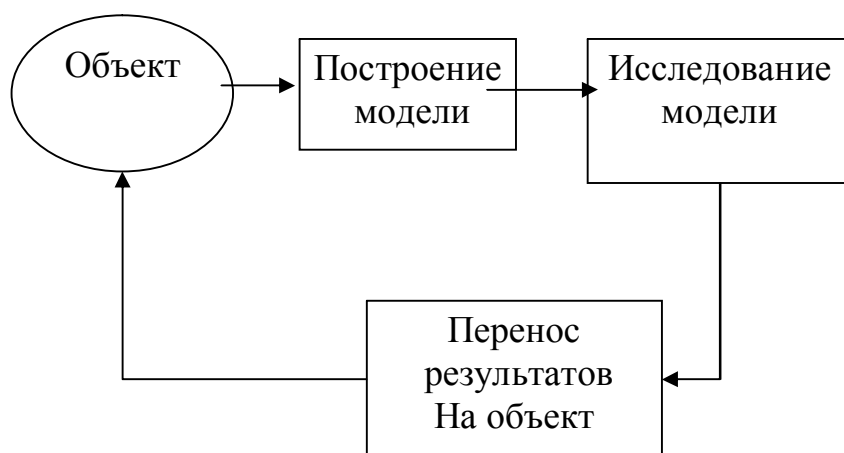


Рисунок 1 Процесс моделирования.

Моделирование включает следующие этапы: построение модели, изучение свойств модели и перенос результатов, полученных при изучении модели, на оригинал.

В электромеханике широко используются следующие виды моделирования: физическое, геометрическое и математическое.

Под физическим моделированием понимают изучение свойств оригинала посредством исследования свойств физического объекта подобного оригиналу в части исследуемых свойств. Достоинство метода: высокая достоверность результатов; недостатки: дополнительные материальные затраты, высокая трудоёмкость, а иногда и невозможность реализации. Используется, как правило, на завершающих стадиях изготовления сложной продукции.

Геометрическое моделирование – получение представления об объекте с помощью чертежей, макетов и т.п. Изготовление чертежей обязательный этап производства любого изделия.

Математическое моделирование – изучение свойств объекта путём исследования свойств математической модели. Благодаря прогрессу вычислительной техники и программного обеспечения математическое моделирование имеет широкое применение. Математическое моделирование имеет универсальный характер, низкую себестоимость и высокую эффективность. В курсе «Моделирование в электромеханике» мы будем рассматривать именно этот вид моделирования.

Из определения математической модели следует, что не всякое математическое уравнение является моделью. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с правой частью, изменяющейся по гармоническому закону. Для того чтобы это уравнение преобразовалось в математическую модель необходимо определить связь его с конкретным явлением. Возможно несколько вариантов.

$$A \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + \frac{x}{C} = D \sin \omega t$$

ВАРИАНТ1. Будем понимать под переменной x электрический заряд – q , тогда $\frac{dq}{dt} = i$ – электрический ток, L – индуктивность, R – активное сопротивление, C – электрическая ёмкость, U – амплитуда напряжения. В результате мы получили математическую модель электрического контура, приведённого на рис 2.

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U \sin \omega t$$

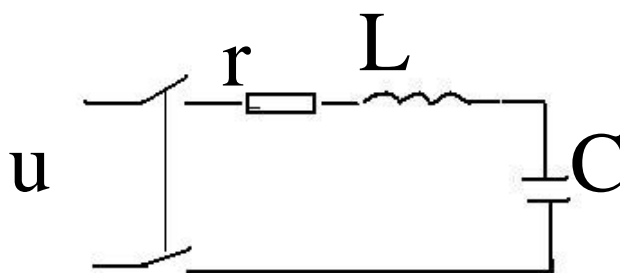


Рисунок 2 Электрический контур.

ВАРИАНТ2. Если под x понимать линейное перемещение тела, то

$\frac{dx}{dt}$ – линейная скорость, $\frac{d^2 x}{dt^2}$ – ускорение, m – масса тела, k – коэффициент вязкости среды, $\frac{1}{C} = c$ – коэффициент жёсткости пружины, F – механическая сила, действующая на тело. В результате получим математическую модель механической системы, приведённую на рис.3.

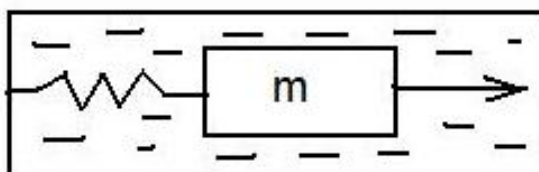


Рисунок 3 Механическая система

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + cl = F \sin \omega t$$

Она описывает вынужденные механические колебания груза, закреплённого на пружине в вязкой среде.

Приведённый пример иллюстрирует, как одно математическое уравнение преобразуется в математические модели объектов различной физической природы. Кроме того, электрический контур можно рассматривать как физическую модель механической колебательной системы и наоборот.

При изучении поведения модели изучаются свойства самой модели, которая является самостоятельным объектом исследования. Далее полученные сведения должны быть перенесены на оригинал с целью предсказания его свойств и характеристик на основе определённых правил перехода от параметров, характеризующих модель к параметрам характеризующих оригинал, то есть правил установления взаимнооднозначного соответствия между оригиналом и моделью. Указанные правила определены в теории подобия.

В электромеханике изучаются как свойства отдельного электромеханического преобразователя, так и электромеханических систем. На рисунке 4 приведена обобщённая схема электромеханической системы (ЭМС). Она включает: электромеханический преобразователь энергии (ЭМПЭ), источник питания, информационные преобразователи (датчики) и систему управления (СУ). Функциональное назначение основных элементов ЭМС: ЭМПЭ – осуществляет электромеханическое преобразование энергии, источник питания преобразует исходную энергию в энергию необходимую для работы ЭМПЭ, информационные преобразователи (датчики напряжения, скорости, тока и т.д.) получают и преобразуют информацию о выходной энергии, СУ собирает информацию с датчиков и на её основе вырабатывает

управляющие сигналы, обеспечивающие требуемое качество преобразования.

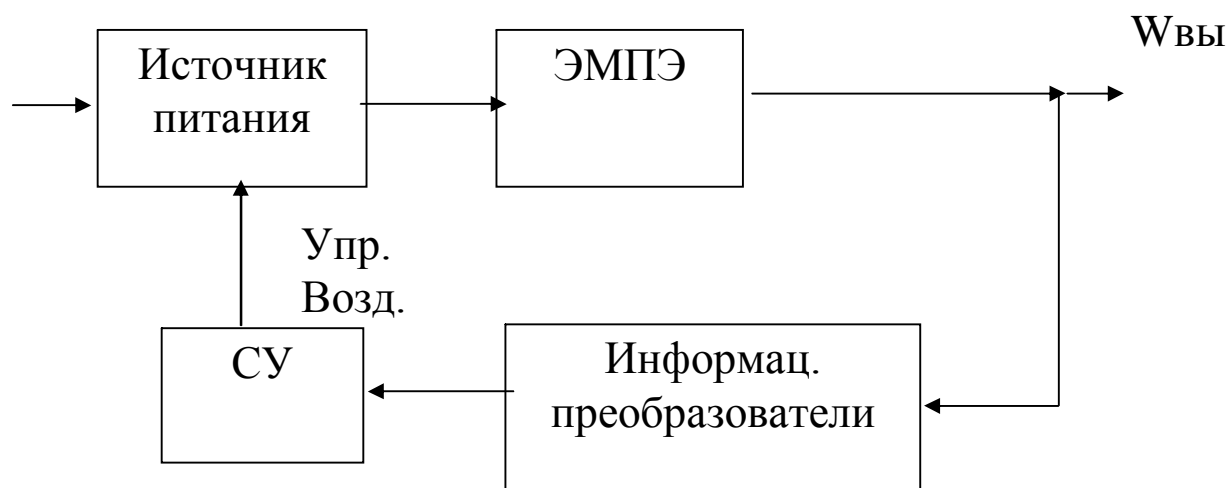


Рисунок 4 Обобщенная схема электромеханической системы

Раздел 2. Обобщённая электрическая машина постоянного тока и её уравнения.

Под обобщённой электрической машиной принято понимать - двухполюсную двухфазную симметричную идеализованную электрическую машину, имеющую две и больше пар обмоток на роторе и статоре.

Идеализованная электрическая машина – это симметричная электрическая машина, имеющая гладкий воздушный зазор, стальные участки с нулевым магнитным сопротивлением и синусные обмотки. Синусные обмотки – это обмотки, создающие синусоидальные м.д.с. в воздушном зазоре. Впервые понятие обобщённой машины было предложено американским инженером – Кроном в начале прошлого века. Он представил обобщённую машину в виде машины постоянного тока с двумя комплектами щёток рис.5.

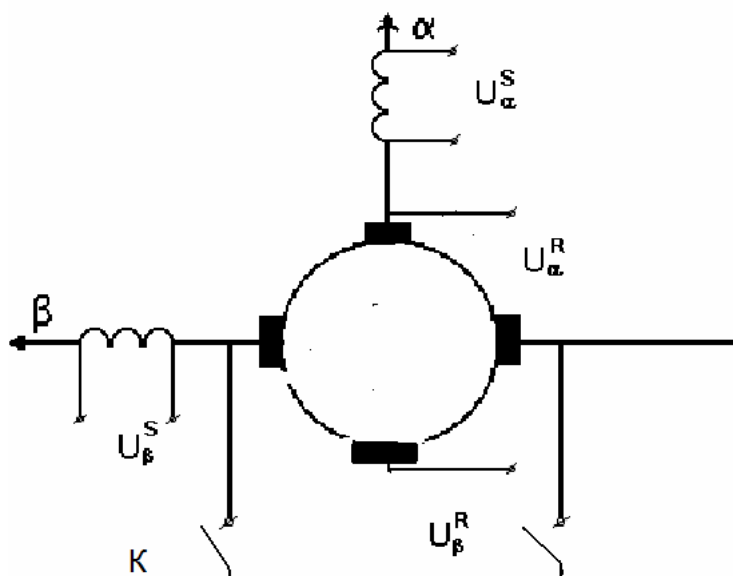


Рисунок 5 Модель обобщённой машины

Таким образом, он предложил схему обобщённой машины постоянного тока, включающую две обмотки на статоре, оси которых взаимно

перпендикулярны, и две обмотки на роторе, образованные двумя комплектами щёток. Для модели справедливы следующие допущения.

1. Насыщение стали отсутствует
2. Индукция в воздушном зазоре - синусоидальна
3. Реакция якоря скомпенсирована
4. Щётки расположены на геометрической нейтрали
5. Параметры обмоток постоянны
6. Потери в стали и механические отсутствуют.

Удобство обобщённой модели в том, что она позволяет просто перейти к модели конкретной машины. Это достигается путём исключения из схемы отсутствующих в рассматриваемой машине обмоток.

Математическая модель машины постоянного тока строится на основе второго закона Кирхгофа и уравнения баланса моментов, действующих на вал. Последнее уравнение называется уравнением движения.

Согласно второму закону Кирхгофа: сумма э.д.с. электрического контура должна уравновешиваться падениями напряжения на активных сопротивлениях этого контура.

$$U_k + \sum e_k = i_k r_k$$

Следовательно, для построения уравнений необходимо определить – э.д.с. действующие в её контурах. В переходных режимах в обмотках наводятся э.д.с. двух типов: э.л.с. вращения и э.д.с. трансформации.

$$e_k = e_{tp} + e_{вр}$$

Э.д.с. вращения появляются в обмотках благодаря перемещению обмоток в магнитном поле, а э.д.с. трансформации за счёт изменения магнитного потока, сцепленного с обмоткой во времени. Из сказанного следует, что э.д.с. трансформации могут быть как в обмотках статора, так и обмотках ротора. Э.д.с. вращения же появляются только в обмотках, ротора машины постоянного тока. Э.д.с. трансформации определяются непосредственно из закона электромагнитной индукции.

$$e_{\alpha s} = -\frac{d\psi_{\alpha s}}{dt}$$

$$e_{\beta s} = -\frac{d\psi_{\beta s}}{dt}$$

$$e_{\alpha r} = -\frac{d\psi_{\alpha r}}{dt}$$

$$e_{\beta r} = -\frac{d\psi_{\beta r}}{dt}$$

Они приведены выше. Рисунок 6-7 иллюстрирует образование э.д.с. вращения в обмотках ротора. На этих слайдах за положительное направление потокосцеплений принято направление, совпадающее с положительным направлением осей координат, а положительным направлением скорости считается вращение против часовой стрелки. Направление э.д.с. вращения определяется по правилу «правой руки». Оно гласит: магнитный поток должен быть направлен в ладонь, отогнутый большой палец должен показывать направление вращения проводников, тогда четыре пальца покажут направление действия э.д.с. Оно отмечено крестиками и точками на окружности якоря.

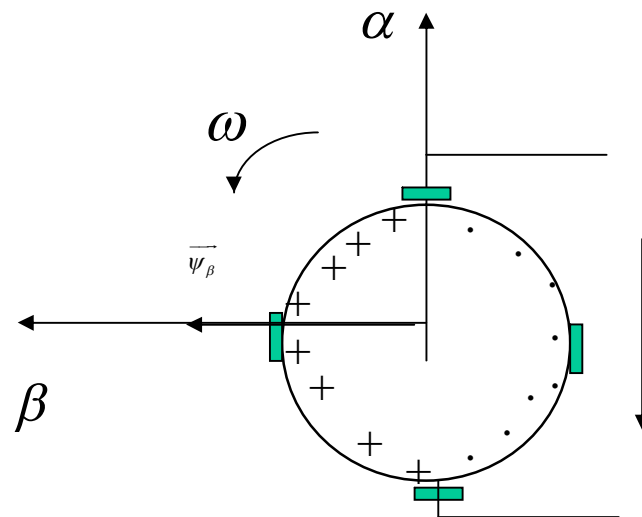


Рисунок 6 Образование ЭДС вращения по оси α

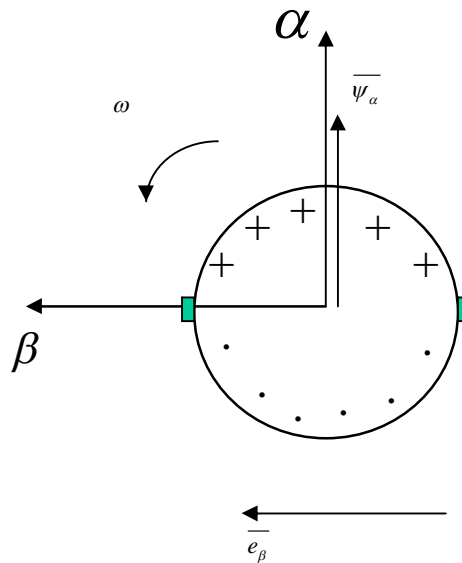


Рисунок 7 Образование ЭДС вращения по оси β

Знак э.д.с. будем считать положительным, если её направление совпадает с положительным направлением тока.

За положительное направление тока, принимается такое направление тока, которое создаёт м.д.с., совпадающую с положительным направлением оси.

$$e_{\alpha \text{ вр}} = -\omega \psi_{\beta} - \text{ЭДС вращения по оси } \alpha;$$

$$e_{\beta \text{ вр}} = \omega \psi_{\alpha} - \text{ЭДС вращения по оси } \beta.$$

Теперь можно перейти непосредственно к записи уравнений для обмоток электрической машины на основе второго закона Кирхгофа. Эти уравнение ещё называют уравнениями электрического равновесия. Они приведены ниже.

$$\begin{aligned}
 u_{\alpha} - \frac{d\psi_{\alpha}}{dt} - \omega \psi_{\beta} &= i_{\alpha} r_a \\
 u_{\beta} - \frac{d\psi_{\beta}}{dt} + \omega \psi_{\alpha} &= i_{\beta} r_a \\
 u_{\alpha} &= \frac{d\psi_{\alpha}}{dt} + \omega \psi_{\beta} + i_{\alpha} r_a \\
 u_{\beta} &= \frac{d\psi_{\beta}}{dt} - \omega \psi_{\alpha} + i_{\beta} r_a
 \end{aligned}
 \quad \Rightarrow \quad
 \left\{ \begin{aligned}
 u_{\alpha} &= \frac{d\psi_{\alpha}}{dt} + \omega \psi_{\beta} + i_{\alpha} r_a \\
 u_{\beta} &= \frac{d\psi_{\beta}}{dt} - \omega \psi_{\alpha} + i_{\beta} r_a \\
 u_f &= \frac{d\psi_f}{dt} + i_f r_f \\
 u_g &= \frac{d\psi_g}{dt} + i_g r_g
 \end{aligned} \right.$$

Уравнение электромагнитного момента и уравнение движения обобщённой машины постоянного тока.

В электромеханическом переходном процессе неизвестными величинами являются токи в обмотках и угловая скорость ротора. Следовательно, для определения всех неизвестных величин переходного процесса необходимо ещё одно уравнение. Таким уравнением является уравнение моментов, действующих на вал электрической машины. Момент электромагнитных сил (электромагнитный момент) должен уравновешивать момент внешних сил (приводного двигателя) плюс динамический момент, необходимый для ускорения вала.

Под электромагнитным моментом, понимается момент, возникающий в результате взаимодействия потока в воздушном зазоре с токами, протекающими в проводниках обмотки якоря, расположенных на внешней поверхности якоря.

Выражение для электромагнитного момента наиболее просто получить с помощью баланса мощностей, записанного для обмоток ротора. Для этого ниже приведены уравнения, левая и правая часть которых умножена на собственные токи соответственно.

$$u_{\alpha} = \frac{d\psi_{\alpha}}{dt} + \omega\psi_{\beta} + i_{\alpha}r_a | i_{\alpha}$$

$$u_{\beta} = \frac{d\psi_{\beta}}{dt} - \omega\psi_{\alpha} + i_{\beta}r_a | i_{\beta} \quad - \text{уравнения электрического равновесия машины}$$

постоянного тока.

Если теперь сложить левые и правые части полученных уравнений, то слева получим суммарную мощность, потребляемую обмотками якоря.

Справа: слагаемое $(i_{\alpha}^2 r_a + i_{\beta}^2 r_a)$ - электрические потери в обмотках якоря;

$(\frac{d\psi_{\alpha}}{dt} i_{\alpha} + \frac{d\psi_{\beta}}{dt} i_{\beta})$ - мощность, расходуемая на изменение энергии магнитного

поля; $\omega(\psi_{\beta} i_{\alpha} - \psi_{\alpha} i_{\beta})$ - электромагнитная мощность.

$$u_{\alpha} i_{\alpha} = \frac{d\psi_{\alpha}}{dt} i_{\alpha} + \omega \psi_{\beta} i_{\alpha} + i_{\alpha}^2 r_a$$

$$u_{\beta} i_{\beta} = \frac{d\psi_{\beta}}{dt} i_{\beta} - \omega \psi_{\alpha} i_{\beta} + i_{\beta}^2 r_a$$

$$p_{эм} = \omega \psi_{\beta} i_{\alpha} - \omega \psi_{\alpha} i_{\beta}$$

$$m_{эм} = p_{эм} / \omega = \psi_{\beta} i_{\alpha} - \psi_{\alpha} i_{\beta}$$

Таким образом, мощность, потребляемая обмотками якоря, тратится на электрические потери, на изменение энергии магнитного поля и электромагнитную мощность. Электромагнитный момент связан с электромагнитной мощностью соотношением: $m_{эм} = p_{эм} / \omega = \psi_{\beta} i_{\alpha} - \psi_{\alpha} i_{\beta}$

Как видно, из приведённого выражения, электромагнитный момент имеет, в общем виде, две составляющие. При положительных токах и потокосцеплениях они имеют разные знаки. Направление действия момента можно определить с помощью правила левой руки. Оно гласит: магнитный поток должен быть направлен в ладонь, четыре пальца показывать направление тока, тогда отогнутый палец покажет направление действия электромагнитной силы. Пара сил, действующих на диаметрально расположенные проводники, создаёт электромагнитный момент. Момент считается положительным, если его направление совпадает с положительным направлением скорости.

В качестве задания для самоконтроля, следует определить знаки моментов, а также определить направление э.д.с. вращения и токов в обмотке якоря для двигательного и генераторного режимов.

$$m_{эм} = J \frac{d\omega}{dt} + m_c \text{ - уравнение движения двигателя}$$

$$m_{ог} = m_{эм} + J \frac{d\omega}{dt} \text{ - уравнение движения генератора}$$

Выше приведены уравнение движения для режима двигателя и генератора. В режиме двигателя – электромагнитный момент

уравновешивает момент сопротивления внешних сил (момент нагрузки) и динамический момент - $j \frac{d\omega}{dt}$.

Добавляя, к уравнениям электрического равновесия уравнение движения получаем полную систему дифференциальных уравнений обобщённой машины постоянного тока:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\alpha} = \frac{d\psi_{\alpha}}{dt} + \omega\psi_{\beta} + i_{\alpha}r_{\alpha} \\ u_{\beta} = \frac{d\psi_{\beta}}{dt} - \omega\psi_{\alpha} + i_{\beta}r_{\alpha} \\ u_f = \frac{d\psi_f}{dt} + i_f r \\ u_g = \frac{d\psi_g}{dt} + i_g r_g \\ m_{эм} = J \frac{d\omega}{dt} + m_c \end{array} \right.$$

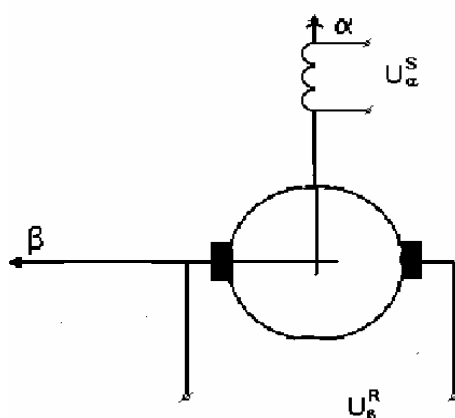
Система уравнений состоит из четырёх уравнений электрического равновесия – по количеству электрических контуров и уравнения движения. Таким образом, система уравнений имеет пятый порядок. Система уравнений является нелинейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Нелинейность может быть обусловлена двумя причинами. Первая – это нелинейность магнитной системы. В нашем случае она отсутствует, так как принято допущение об отсутствии насыщения магнитопровода ($\mu_{cm} = \infty$). Вторая – связана с наличием в уравнениях произведений неизвестных величин. Принятые допущения не исключают наличие таких слагаемых в уравнениях.

Правильное определение типа уравнений имеет большое значение, так как от этого зависит метод решения. Известно, что нелинейные дифференциальные уравнения решаются только численными методами. Для решения линейных дифференциальных уравнений применимы также операторный и классические методы решения. Как будет показано ниже, в некоторых случаях возможно обеспечить условия при которых уравнения

становятся линейными. Линейные уравнения позволяют получить аналитическое решения, которое даёт общее представление о влиянии параметров машины на переходный процесс. Недостатком аналитических методов может быть недостаточная точность. Численные методы обладают высокой точностью, но уступают аналитическим методам в наглядности. Наилучшее решение даёт сочетание аналитических и численных методов. Аналитическое решение даёт общее представление о процессе, а с помощью численных методов достигается требуемая точность.

Раздел 3.1.1 Пуск двигателя постоянного тока независимого возбуждения.

Модель двигателя постоянного тока (ДПТ НВ) представлена на рисунке 8. Она получается из обобщённой модели путём исключения обмоток отсутствующих в машине. Таким образом, исключаются: обмотка возбуждения, расположенная по оси β и обмотка якоря, расположенная по оси α . В математической модели ДПТ НВ также следует исключить уравнения электрического равновесия для этих обмоток, а также слагаемые, содержащие переменные несуществующих контуров, из других уравнений.



Модель двигателя независимого возбуждения

Рисунок 8 Модель двигателя постоянного тока независимого возбуждения

Пуск ДПТ НВ принято рассматривать при условии, что поток возбуждения достиг установившегося значения. Это достигается определённой последовательностью включения обмоток; сначала подводится питание к обмотке возбуждения и, после завершения переходного процесса возбуждения, подключается обмотка якоря. Такой порядок включения означает правомерность допущения, что ток возбуждения в процессе пуска остаётся постоянным. Это даёт основание исключить из математической модели уравнение цепи возбуждения. В результате остаются два уравнения, приведённые ниже:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_a = i_a R_a + \frac{d\Psi_\beta}{dt} + \Psi_\alpha \omega - \text{математическая модель ДПТ НВ} \\ M_{эм} = M_c + J \frac{d\omega}{dt} \end{array} \right.$$

Анализ уравнений и методы решения.

Проанализируем дифференциальные уравнения и определим методы, которыми их можно решать. Система уравнений состоит из уравнения электрического равновесия обмотки якоря и уравнения движения. Эти уравнения классифицируются как линейные обыкновенные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения линейные так как; 1) насыщение стали отсутствует по основным допущениям и 2) в уравнениях отсутствуют произведения неизвестных величин (по дополнительному допущению $\psi_\alpha = 0$).

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами могут решаться аналитическими и численными методами. Выполним решение операторным методом.

Анализ переходного процесса

Переходный процесс начинается с момента подачи напряжения на обмотку якоря. Ток в обмотке возбуждения к этому моменту времени достиг установившегося значения. Нарастание тока якоря приводит к увеличению электромагнитного момента. При этом вал машины остаётся неподвижным до тех пор, пока электромагнитный момент не сравняется с моментом сопротивления нагрузки. С этого момента, называемого моментом трогания, двигатель начинает разгоняться. Таким образом, переходный процесс можно представить из двух этапов.

Первый этап: от момента подачи напряжения на обмотку якоря до момента трогания.

Второй этап: от момента трогания до вращения с установившейся скоростью.

Решение на первом этапе.

На первом этапе ротор неподвижен, следовательно, в уравнениях отсутствует э.д.с. вращения и динамический момент. Это означает, что система уравнений вырождается в одно уравнение:

$$U_a = i_a R_a + \frac{d\Psi_a}{dt}$$

$$U_a = i_a R_a + pL_a i_a$$

$$i_a(p) = \frac{U_a}{R_a + pL_a} = \frac{S(p)}{N(p)}.$$

Оно отражает процесс включения катушки на постоянное напряжение. Незвестной переменной в уравнении является ток якоря, начальное значение которого равно нулю. Учитывая нулевое начальное условие, переход от оригинала к изображению осуществляется простой заменой символа дифференцирования оператором p . После чего, легко найти изображение тока якоря в виде дробно – линейной функции.

По найденному изображению находится оригинал тока с помощью теоремы разложения:

$$i_a(t) = \frac{S(0)}{N(0)} + \sum_{\kappa=1}^n \frac{S(\alpha_\kappa)}{\alpha_\kappa N'(\alpha_\kappa)} e^{\alpha_\kappa t}$$

$$S(p) = U_a$$

$$N(p) = R_a + pL_a$$

$$N'(p) = L_a$$

$$\alpha = -\frac{R_a}{L_a} = -\frac{1}{T_a}$$

Где обозначено: $S(0)$, $N(0)$ – значения полинома числителя и знаменателя при $p = 0$, α - корень уравнения $N(p) = 0$, T_a - электромагнитная постоянная обмотки якоря.

В результате выполнения соответствующих преобразований получается закон изменения тока якоря в виде нарастающей экспоненты:

$$i(t) = \frac{U_a}{R_a} - \frac{U_a}{T_a} e^{-\frac{t}{T_a}} = \frac{U_a}{R_a} \left(1 - e^{-\frac{t}{T_a}} \right)$$

Правильность решения проверяется на соответствие начальным условиям и значению установившегося тока якоря при неподвижном роторе. *Указанную проверку выполнить самостоятельно.* На рисунке 9 приведены осциллограммы переходного процесса тока якоря, рассчитанные для разных значений постоянной времени якоря.

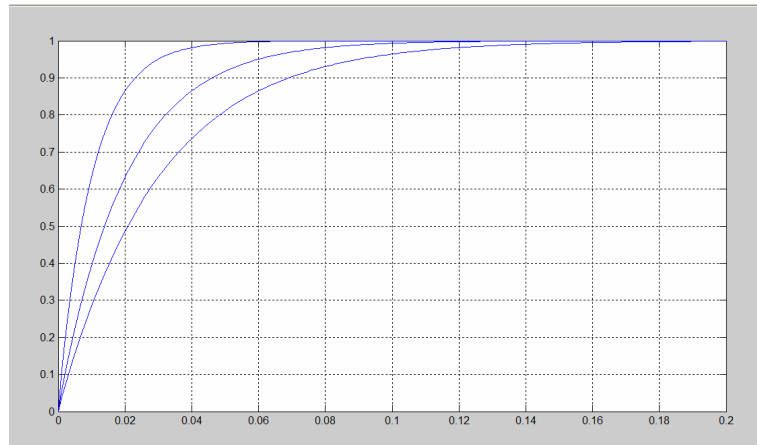


Рисунок 9 Осциллограммы переходного процесса тока якоря

Ниже приведены соотношения для определения времени трогания в зависимости от величины момента сопротивления нагрузки и электромагнитной постоянной времени. Приведённое решение справедливо до момента начала вращения ротора:

$$m_{эм} = \psi_a i_{a0} = m_c; \quad i_{a0} = m_c / \psi_a; \quad i(t_{mp}) = \frac{U_a}{R_a} \left(1 - e^{-\frac{t_{mp}}{T_a}} \right) = i_{a0}; \quad t_{mp} = -T_a \ln \left(1 - \frac{i_{a0} R_a}{U_a} \right);$$

Решение на втором этапе.

На этапе разгона переходный процесс определяется решением уравнений:

$$\begin{cases} U_a = i_a R_a + \frac{d\Psi_\beta}{dt} + \Psi_\alpha \omega \\ M_{эм} = M_c + J \frac{d\omega}{dt} \end{cases}$$

Начальные условия на этом этапе определяются для момента трогания. В момент начала вращения скорость равна нулю, а ток якоря определяется моментом сопротивления нагрузки, как было показано выше. Переход к изображению осуществляется с учётом конечного значения тока якоря в момент трогания. Полученные таким образом операторные уравнения имеют вид:

$$\frac{di_a}{dt} \Rightarrow pi_a(p) - pi_{a0};$$

$$\begin{vmatrix} U_a - pi_{a0}L_a & \Psi_\alpha \\ -M_c & pJ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_a + pL_a & \Psi_\alpha \\ -\Psi_\alpha & pJ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_a(p) \\ \omega(p) \end{vmatrix};$$

$$i_a(p) = \frac{S_1(p)}{N_1(p)}; \quad \omega(p) = \frac{S_2(p)}{N_1(p)}.$$

Главный определитель системы уравнений, образующей математическую модель, характеристическое уравнение системы и корни этого уравнения.

$$N_1(p) = \begin{vmatrix} R_a + pL_a & -\Psi_\alpha \\ \Psi_\alpha & pJ \end{vmatrix} - \text{главный определитель};$$

$$N_1(p) = JL_a(p^2 + \frac{1}{T_a}p + \frac{\Psi_\alpha^2}{JL_a}) = 0 - \text{характеристическое уравнение системы}$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2T_a} \pm \sqrt{\frac{1}{4T_a} - \frac{1}{T_a T_M}} - \text{корни характеристического уравнения}$$

Здесь, T_M - электромеханическая постоянная времени. Физический смысл электромеханической постоянной времени можно получить из рассмотрения пуска идеального двигателя постоянного тока без нагрузки под действием постоянного момента, равного пусковому

$$m_{эм} = \Psi_\alpha I_n = \Psi_\alpha \frac{U_a}{R_a}$$

Уравнение движения для этого случая имеет вид

$$\Psi_\alpha \frac{U_a}{R_a} = j \frac{d\omega}{dt}$$

Решая, это уравнение методом разделения переменных с учётом того, что двигатель разгонится до скорости идеального холостого хода - $\omega_0 = \frac{U_a}{\psi_a}$,

получим $t_p = \frac{JR_a}{\psi_a^2} = T_M$.

Таким образом, электромеханическая постоянная равна времени разгона идеального двигателя постоянного тока до скорости идеального холостого хода.

Как видно из решения характеристического уравнения, его корни определяются соотношением электромагнитной и электромеханической постоянных времени. Так, при $T_M > 4T_a$, корни действительные, а при $T_M < 4T_a$ - корни комплексные сопряжённые.

Ниже приведен алгоритм получения выражения для оригинала тока якоря в соответствии с теоремой разложения:

$$S_1(p) = \begin{vmatrix} U_a - pi_{a0}L_a & \psi_a \\ -M_c & pJ \end{vmatrix} = (U_a - pi_{a0}L_a)Jp + \psi_a M_c;$$

$$S_2(p) = \begin{vmatrix} R_a + pL_a & U_a - pi_{a0}L_a \\ -\psi_a & -M_c \end{vmatrix} = \psi_a U_a - R_a M_c;$$

$$i_a(p) = \frac{(U_a + pi_{a0}L_a)Jp + \psi_a M_c}{N_1(p)} \quad \text{- изображение тока якоря}$$

$$i_a(p) = i_{a0} + \frac{(1/T_a - i_{a0}\psi_a^2 / JL_a)p}{p^2 + p/T_a + \psi_a^2 / JL_a}$$

$$i_a(t) = i_{a0} + \frac{U_a / R_a - i_{a0}}{2\Omega_0 T_a} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}) \quad \text{- выражение для оригинала тока якоря.}$$

$$\Omega_0 = \sqrt{(1/2T_a)^2 - \psi_a^2 / JL_a}$$

Проведем анализ выражения для оригинала тока якоря. Первое, что необходимо сделать – это определить соблюдение начальных условий и проверку тока установившегося режима. При подстановке в выражение тока $t=0$ получаем начальное значение тока - i_{a0} , что соответствует условиям задачи. Для определения тока установившегося режима следует подставить $t=\infty$. Эта подстановка даёт также - i_{a0} . Действительно, в установившемся

режиме ток якоря определяется моментом сопротивления нагрузки и потокоцеплением взаимоиндукции между обмотками возбуждения и якоря, что вытекает из равенства $m_{эм} = m_c = \psi_{\alpha} i_{a0}$. Таким образом, оба условия выполняются. Теперь следует объяснить характер изменения тока. Характер переходного процесса определяется видом корней характеристического уравнения: если корни – действительные, то процесс изменения тока носит аperiodический характер, если – комплексные, то колебательный. Как было замечено ранее, для рассматриваемого процесса возможно два варианта: корни могут быть либо действительные, либо комплексные сопряжённые.

Для полученного ранее выражения для корней характеристического уравнения, рассмотрим случай действительных корней. Анализ корней показывает, что оба действительных корня отрицательные. Это означает, что переходный процесс затухает во времени. В выражение для тока входят две экспоненты с противоположными знаками и отличающимися показателями степени (декрементами затухания). Это приводит к замедлению нарастания тока и, когда быстро меняющаяся экспонента существенно уменьшается, ток достигает максимума. После этого он уменьшается под действием медленно меняющейся экспоненты до величины тока установившегося режима. С физической точки зрения на изменение тока влияет противо-э.д.с., наводимая в обмотке якоря. Во время разгона скорость ротора увеличивается и увеличивается э.д.с. в обмотке якоря, что и приводит, сначала к замедлению нарастания тока, а затем и уменьшению тока до установившегося значения. Составляющие тока якоря представлены на рисунке 9.

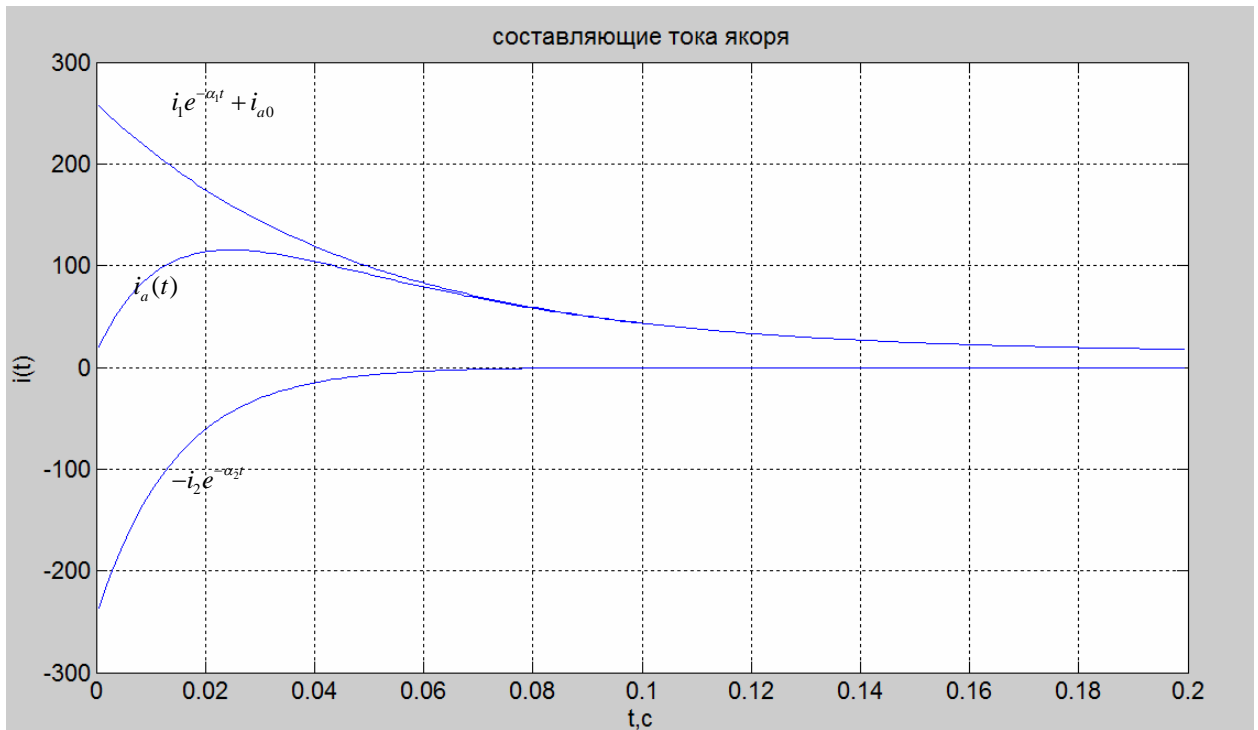


Рисунок 9 Составляющие тока якоря при аperiодическом характере протекания переходного процесса

Случай комплексных корней. Уравнение второго порядка имеет два комплексных сопряжённых корня с отрицательными вещественными частями. Это означает, что процесс носит колебательный характер с затухающей амплитудой. После ряда несложных преобразований выражение тока приводится к виду:

$$i_a(t) = i_{a0} + \frac{U_a / R_a - i_{a0}}{\Omega_0 T_a} e^{-\frac{t}{2T_a}} \sin \Omega_0 t$$

Ток якоря при колебательном характере переходного процесса показан рисунке 10.

Для получения осциллограммы тока нужно соединить решения, полученные на первом и втором этапах в один график. Учитывая, что время трогания достаточно мало, то начальный участок экспоненты можно заменить линейной зависимостью без существенной погрешности.

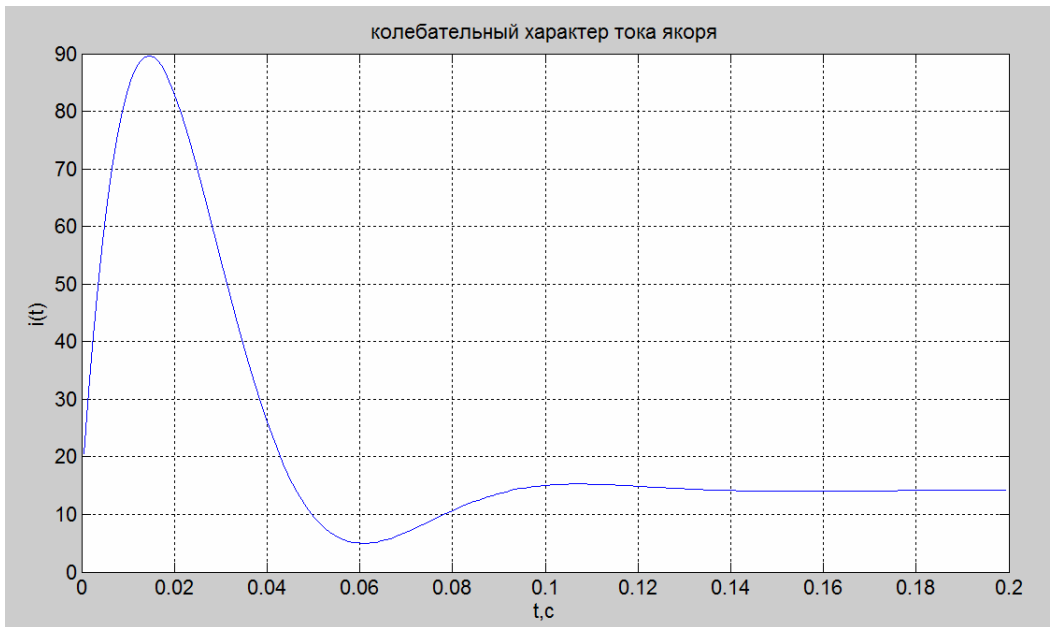


Рисунок 10 Ток якоря при колебательном характере протекания переходного процесса

Изображение для угловой частоты вращения ротора имеет вид:

$$\omega(p) = \frac{R_a M_c - U_a \psi_a}{N(p)}, \text{ а соответствующий оригинал частоты вращения,}$$

полученный аналогично току якоря по теореме разложения, в таком случае, принимает вид:

$$\omega(t) = -\frac{U_a - R_a i_{a0}}{\psi_a} - \frac{U_a \psi_a - R_a M_c}{2L_a J \Omega_0 / T_a T_{эм}} (\alpha_2 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t});$$

где $\omega_{ycm} = \frac{U_a - R_a i_{a0}}{\psi_a}$ - частота вращения установившегося режима работы.

Для случая вещественных корней угловая скорость складывается из установившейся скорости и суммы двух экспонент см. рисунок 11. В результате скорость имеет аperiodический характер. Для случая комплексных корней выражение для скорости можно привести к виду, содержащему гармоническую функцию в явном виде:

$$\omega(t) = \omega_{ycm} + \omega_{ycm} \frac{\sqrt{\beta^2 + \Omega_0^2}}{\Omega_0} e^{-\frac{t}{2T_a}} \text{Cos}(\Omega_0 t - \varphi).$$

где $\alpha_{1,2} = \beta \pm j\Omega_0$; $\varphi = \text{arctg} \frac{\beta}{\Omega_0}$

На рисунке 12 приведена осциллограмма угловой скорости для этого режима.

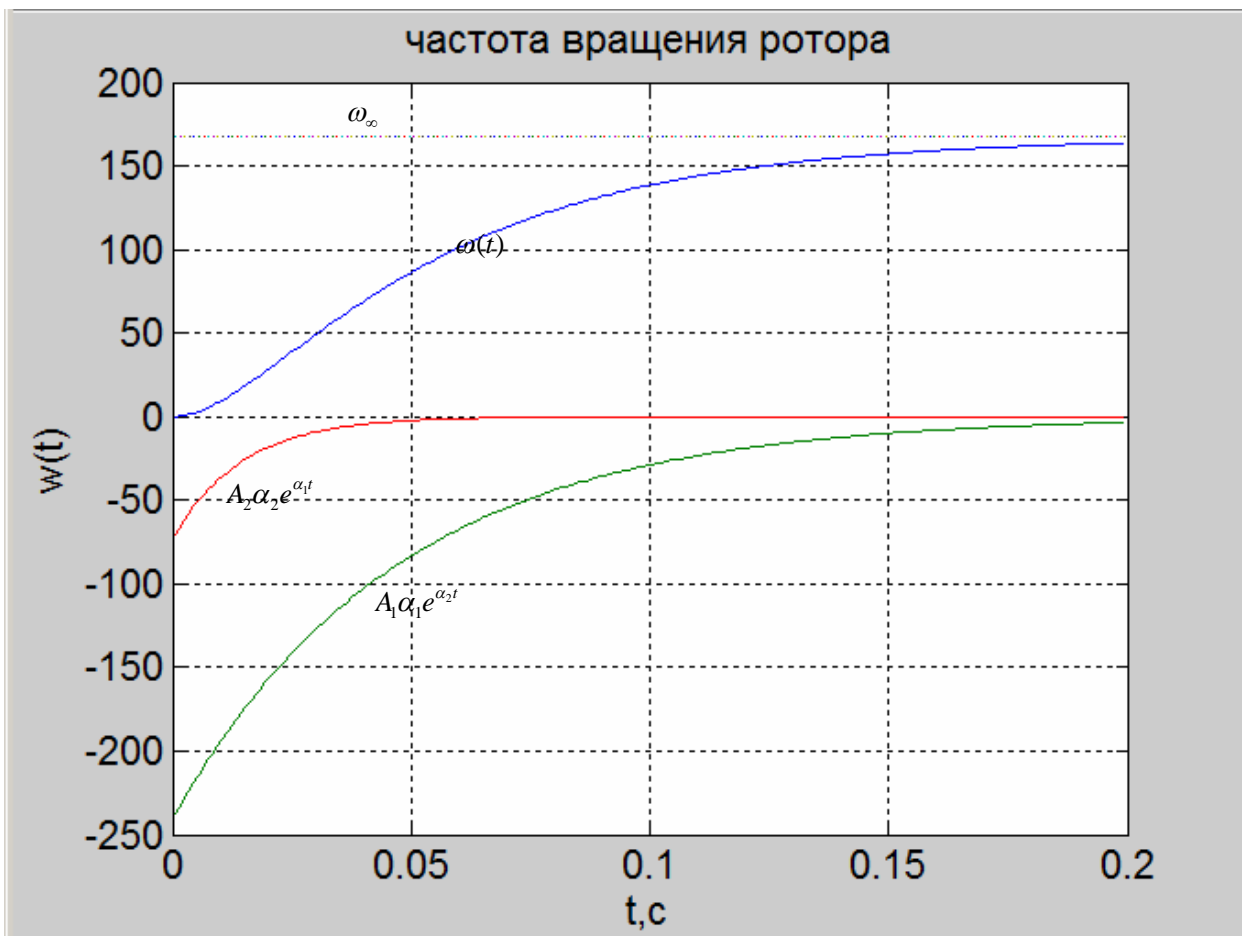


Рисунок 11 Частота вращения ротора для случая вещественных корней

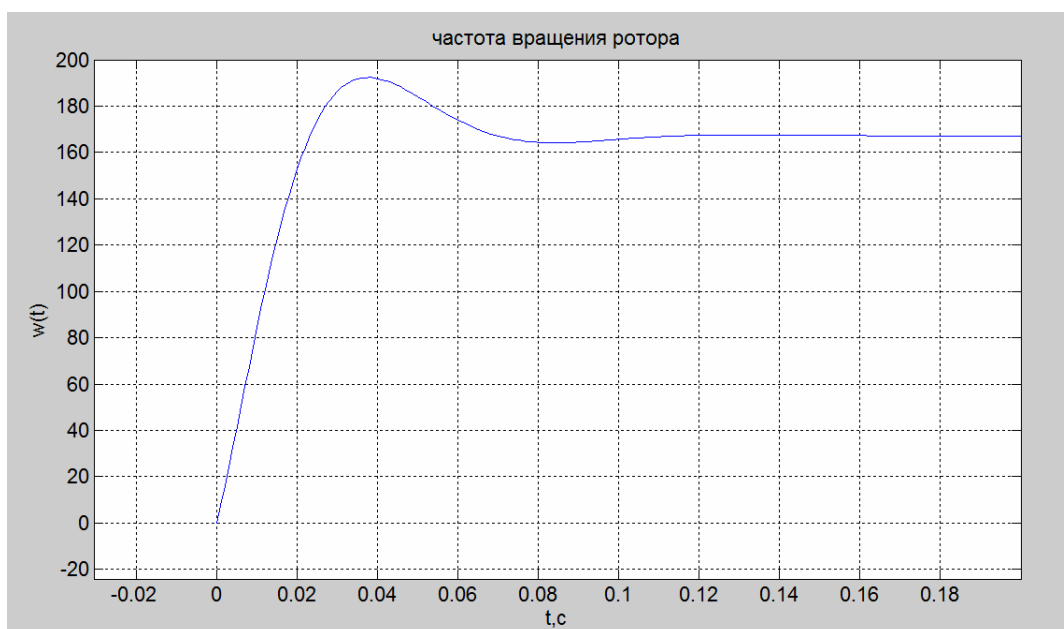


Рисунок 12 Частота вращения ротора для случая комплексных корней

Раздел 3.1.2 Пуск двигателя постоянного тока параллельного возбуждения.

При пуске двигателя параллельного возбуждения обмотка возбуждения и обмотка якоря включаются одновременно. В силу этого обстоятельства для описания переходного процесса необходимы уравнения электрического равновесия обмоток возбуждения и якоря плюс уравнение движения:

$$\begin{cases} U_a = i_a R_{ac} + \frac{d\Psi_\beta}{dt} + \Psi_\alpha \omega \\ U_f = i_a R_f + \frac{d\Psi_f}{dt} \\ M_{эм} = M_c + J \frac{d\omega}{dt} \end{cases}$$

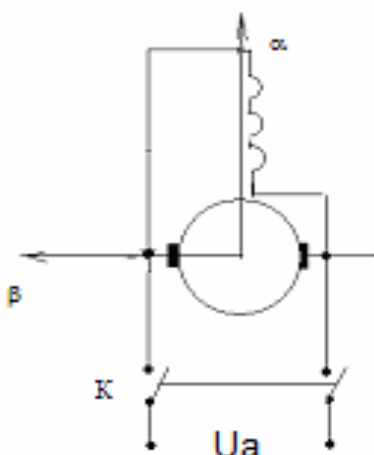


Рисунок 13 Машина постоянного тока параллельного возбуждения

Данные уравнения являются нелинейными дифференциальными уравнениями, так как в них присутствуют произведения неизвестных величин. Решение нелинейных уравнений возможно численными методами.

Рассмотрим пуск двигателя для нагрузки моментом типа “сухого трения” поэтапно. Первый этап – электромагнитный переходный процесс в обмотках при неподвижном роторе и второй – разгон двигателя, начинаемого с момента времени, когда электромагнитный момент сравняется с моментом сопротивления нагрузки.

На первом этапе система уравнений распадается на два независимых уравнения:

$$1. U = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt}; \implies i_f = U(1 - e^{-\frac{t}{T_f}}) / R_f; \text{ - уравнение обмотки}$$

возбуждения;

$$2. U = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt}; \implies i_a = U(1 - e^{-\frac{t}{T_a}}) / R_a; \text{ - уравнение обмотки якоря};$$

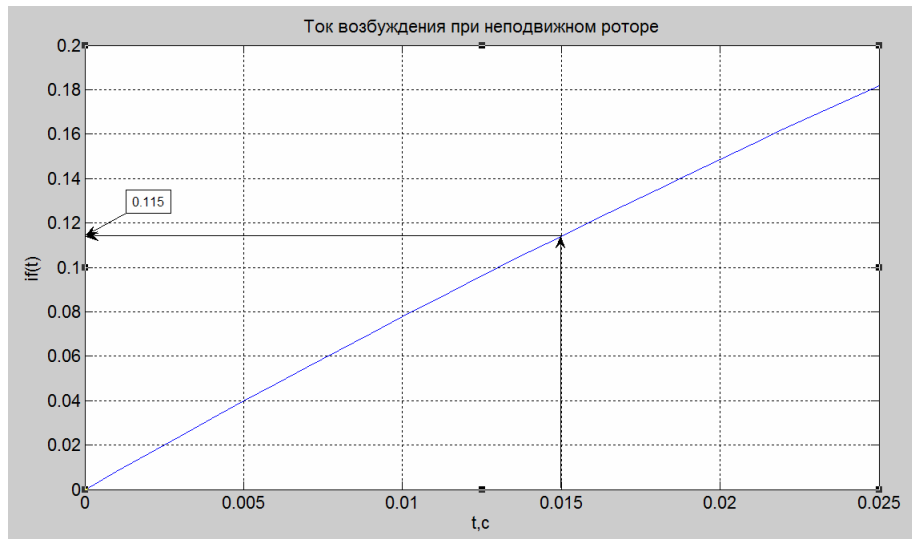


Рисунок 14 Решение уравнения обмотки возбуждения при неподвижном роторе двигателя параллельного возбуждения

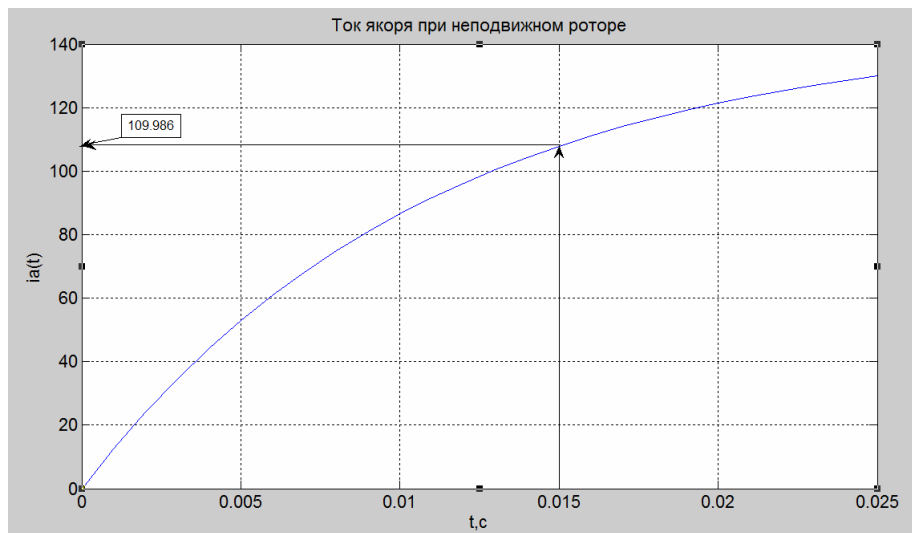


Рисунок 15 Решение уравнения обмотки якоря при неподвижном роторе двигателя параллельного возбуждения

Используя эти зависимости, легко определить электромагнитный момент в функции времени. Осциллограмма момента изображена на рисунке 16. По этой осциллограмме по значению момента сопротивления находится время трогания. Зная, время трогания по рисункам 14-15 определяются начальные значения токов для второго этапа пуска.

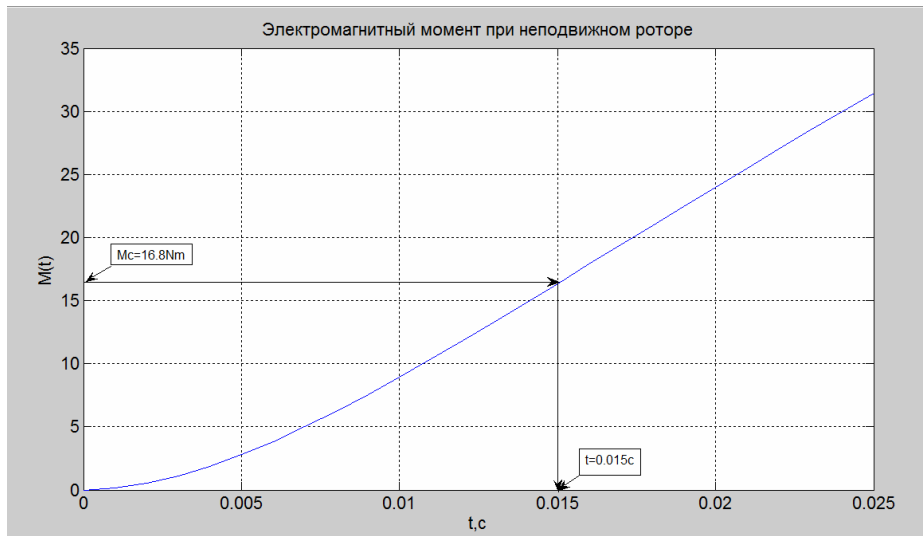


Рисунок 16 Электромагнитный момент при неподвижном роторе двигателя параллельного возбуждения

$$\begin{cases} \frac{di_a}{dt} = \frac{U_a}{L_a} - \frac{1}{T_a} i_a - \frac{c}{L_a} \omega i_f \\ \frac{di_f}{dt} = \frac{U_f}{L_f} - \frac{1}{T_f} i_f \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J} [c i_f i_a - M_c] \end{cases} \quad - \text{математическая модель разгона двигателя}$$

параллельного возбуждения, где $U_a = U_f$; $T_a = L_a / R_a$; $T_f = L_f / R_f$; $M_{эм} = c i_f i_a$; $c = \psi_\alpha / i_f$.

Математическая модель разгона двигателя параллельного возбуждения представляет собой нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме, что необходимо для применения численных методов решения. Решение системы приведено на рисунках 17-20.

Отличительной особенностью пуска двигателя параллельного от пуска двигателя независимого возбуждения является повышенное значение тока

якоря в момент трогания и большее значение максимума тока. Это объясняется тем, что в момент трогания ток возбуждения существенно меньше установившегося значения. Кроме того, переходный процесс длится существенно дольше, так как электромагнитная постоянная времени обмотки возбуждения много больше электромагнитной постоянной обмотки якоря. В остальном характер переходного процесса определяется аналогично как в машине с независимым возбуждением.

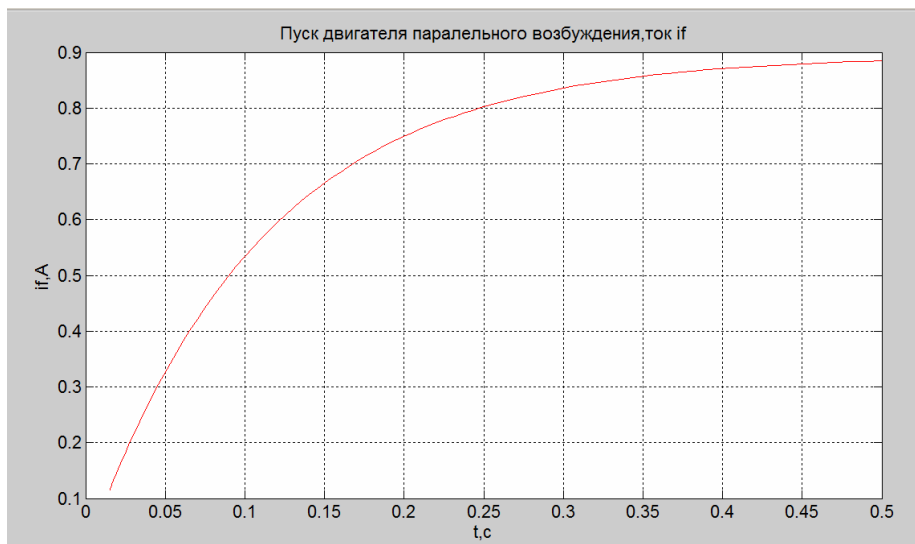


Рисунок 18 Ток возбуждения при пуске двигателя параллельного возбуждения

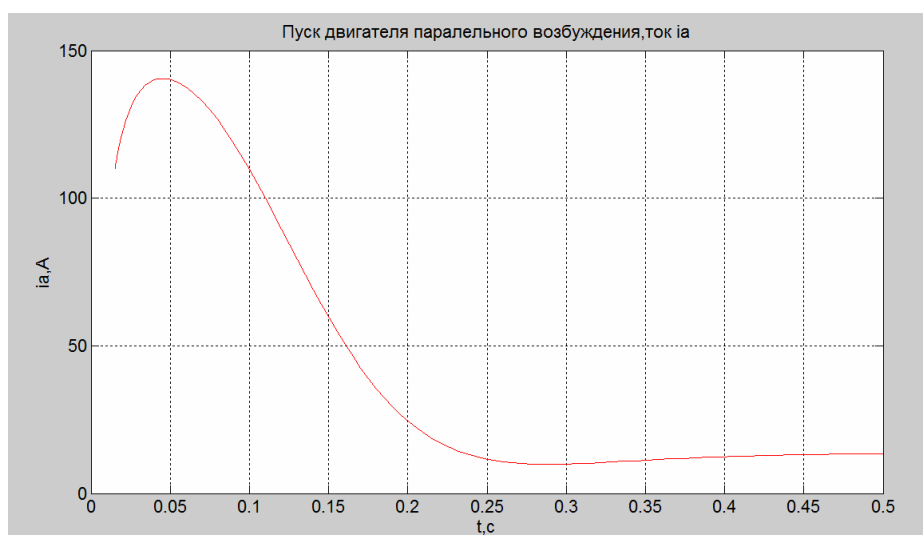


Рисунок 19 Ток якоря при пуске двигателя параллельного возбуждения

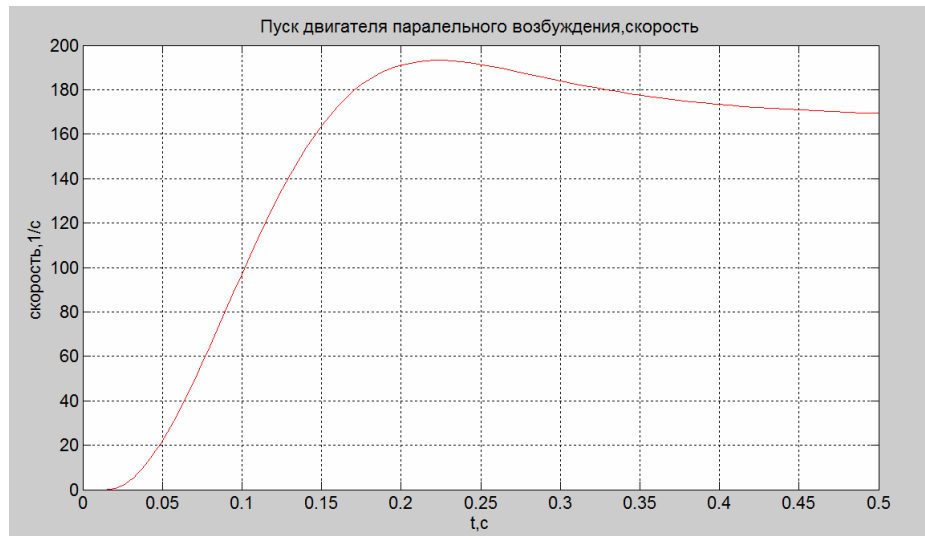


Рисунок 20 Осциллограмма частоты вращения ротора при пуске двигателя параллельного возбуждения

Модель двигателя постоянного тока последовательного (сериесного) возбуждения.

В двигателе последовательного возбуждения обмотка якоря и возбуждения соединены последовательно и обтекаются одним током (см. рисунок 21). Это позволяет уравнения электрического равновесия объединить в одно уравнение.

$$\begin{cases} U_a = i_a (R_a + R_s) + (L_a + L_s) \frac{di_a}{dt} + \omega c_e i_a \\ c_m i_a^2 = J \frac{d\omega}{dt} + M_c \end{cases} \quad \text{- математическая модель пуска}$$

двигателя постоянного тока последовательного возбуждения.

А так как напряжение питания подаётся одновременно на обе обмотки, то переходный процесс начинается одновременно в обеих обмотках. При этом, момент, развиваемый двигателем, зависит от квадрата тока якоря. Это обстоятельство позволяет использовать двигатель в приводах с большими пусковыми моментами, например в электротранспорте. При этом следует помнить, что пуск без нагрузки приводит к разгону двигателя до скорости, превышающей допустимое значение во много раз и поломке двигателя. При

пуске без нагрузки ток якоря стремится к току холостого хода, который существенно меньше номинального, а, следовательно, и поток возбуждения будет существенно меньше, что приводит к уменьшению э.д.с. и увеличению скорости.

Представленная система уравнений двигателя последовательного возбуждения является нелинейной, решение которой осуществляется численными методами.

Раздел 4 Общие вопросы математического моделирования машин переменного тока.

Системы координат.

Обобщенная система координат.

Уравнения асинхронной машины в различных координатах.

Системы координат.

Для исследования режимов работы электрических машин применяются различные системы координат. Выбор системы координат диктуется стремлением получить наиболее простое и удобное решение задачи. Системы координат могут быть неподвижными в пространстве и перемещающимися (вращающимися). Исходной системой координат является естественная система, оси которой связаны с магнитными осями фаз электрической машины и в общем случае представляет собой многолучевую звезду, (см. рисунок 22).

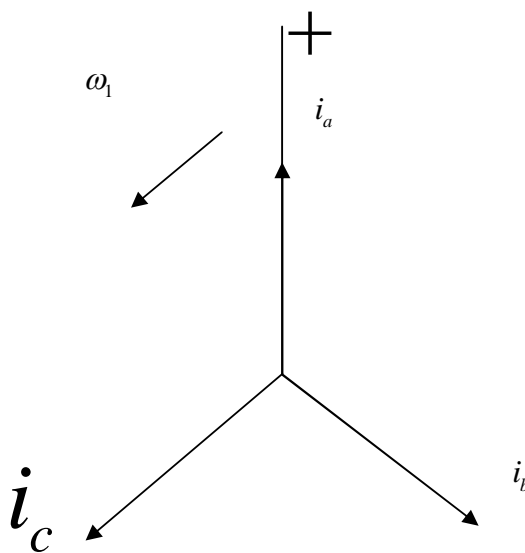


Рисунок 22 Трехфазная (естественная) система координат

Для данной системы справедливо записанные выражения для токов фаз:

$$i_a = I_m \cos \omega_1 t; \quad i_b = I_m \cos \left(\omega_1 t - \frac{2\pi}{3} \right); \quad i_c = I_m \cos \left(\omega_1 t + \frac{2\pi}{3} \right).$$

Учитывая, что в электрической машине обмотки могут располагаться как на статоре, так и на роторе, то уравнения для них изначально представляются в разных координатах. Для совместного решения таких уравнений их необходимо привести к одной системе координат. В этом случае возникает необходимость перехода от неподвижной системы координат к вращающейся системе и наоборот. Такое преобразование при исследовании переходных режимов в ряде случаев даёт возможность преобразовать дифференциальные уравнения в обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и существенно облегчить их решение.

Для анализа переходных режимов машин переменного тока используются следующие ортогональные системы координат:

1. α и β - неподвижная система ортогональных координат - система координат статора;
2. d и q - система ортогональных координат, вращающаяся со скоростью ротора - координатная система ротора;
3. u и v - система ортогональных координат, вращающаяся с синхронной скоростью поля - синхронно вращающаяся система координат;
4. x и y - система ортогональных координат, вращающаяся с произвольной скоростью и являющаяся общим случаем для всех выше упомянутых координатных систем - обобщенная система координат.

ω_k - частота вращения координатной системы;

ω - частота вращения ротора;

ω_1 - частота вращения поля, синхронная частота вращения;

Преобразование уравнений наиболее удобно выполнять, если они записаны в векторной форме, то есть с использованием изображающих векторов, рисунок 23. Физической основой изображающих векторов является то обстоятельство, что в машинах переменного тока токи в

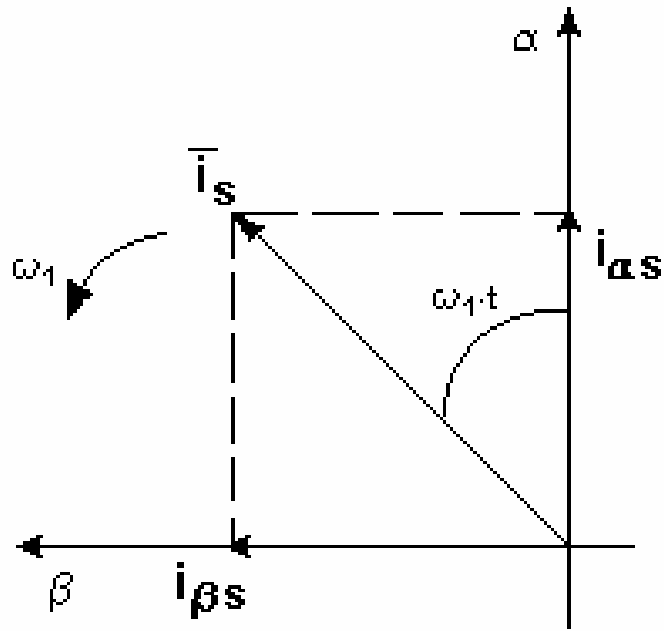


Рисунок 23 Изображающий вектор тока статора

обмотках статора и ротора создают в пространстве вращающиеся магнитодвижущие силы и магнитные поля. В идеализированной машине магнитные потоки и потокосцепления пропорциональны токам. Поэтому можно представить наличие в машине пространственных волн не только м.д.с. и магнитных потоков, но и токов, потокосцеплений, а также э.д.с. и напряжений:

$$\bar{i}_s = \frac{2}{m} \cdot (i_A + a \cdot i_B + a^2 \cdot i_C); \quad \bar{\psi}_s = \frac{2}{m} \cdot (\psi_A + a \cdot \psi_B + a^2 \cdot \psi_C); \quad \bar{U}_s = \frac{2}{m} \cdot (U_A + a \cdot U_B + a^2 \cdot U_C);$$

где $a = e^{j \cdot \frac{2\pi}{3}}$ пространственный оператор поворота на 120 градусов в положительном направлении (против часовой стрелки).

Указанное обстоятельство позволяет использовать при анализе некоторые пространственные волны, а при синусоидальном распределении – векторы, изображающие собой магнитные потоки, м.д.с, токи, потокосцепления, э.д.с. и напряжения.

Выражения для изображающих векторов показывают, что изображающий вектор складывается из пространственных векторов, величина которых равна мгновенному значению величины, а его положение определяется положением соответствующей фазы в пространстве. Амплитуда, полученного таким образом вектора в $m/2$

больше амплитуды соответствующего временного вектора. Поэтому вводится коэффициент $2/m$ для того, чтобы изображающий вектор был равен по модулю фазному значению. Из представленного на данном слайде рисунка видно, что изображающий вектор, в данном случае тока, вращается с синхронной скоростью. Проекция изображающего вектора тока на оси трехфазной системы координат, даёт мгновенные значения токов соответствующих фаз. При этом введены следующие обозначения:

i_A, i_B, i_C, \bar{i}_s - токи фаз и изображающий вектор тока статора;

U_A, U_B, U_C, \bar{U}_s - напряжения фаз и изображающий вектор напряжения статора;

$\psi_A, \psi_B, \psi_C, \bar{\psi}_s$ - потокосцепления фаз и изображающий вектор потокосцепления статора.

Иллюстрация выше сказанного приведена на рисунке 23.

На рисунке 24 представлена обобщенная система координат – x, y , где γ – угол поворота обобщенной системы координат относительно неподвижной оси фазы А. Угол α – угол между изображающим вектором и осью фазы А, ω_x - угловая скорость обобщенной системы координат.

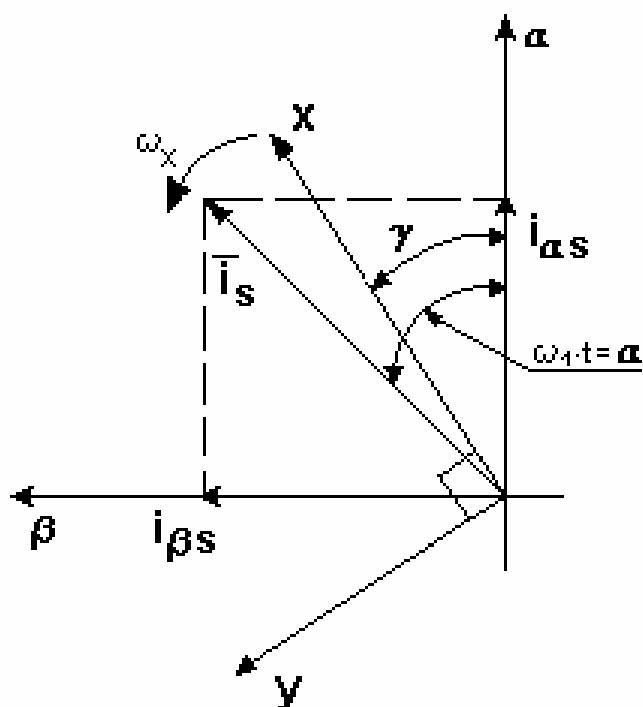


Рисунок 24 Обобщенная координатная система

Представленные на рисунке геометрические построения поясняют преобразование изображающего вектора из неподвижной системы координат во вращающуюся. Во вращающейся системе координат вектор тока определяется углом $(\gamma - \alpha)$. Это означает, что вектор тока записанный в неподвижной системе координат следует умножить на $e^{-j\gamma}$. Здесь же приведено выражение для обратного перехода: $\bar{i}_{sp} = \bar{i}_s \cdot e^{-j\gamma}$;
 $\bar{i}_s = \bar{i}_{sp} \cdot e^{j\gamma}$

Понятие изображающих векторов позволяет представить уравнения электрической машины в векторной форме:

$$\begin{cases} u_a = i_a R + \frac{d\psi_a}{dt} \Big| * \frac{2}{3} \\ +u_b = i_b R + \frac{d\psi_b}{dt} \Big| * \frac{2}{3} a \\ u_c = i_c R + \frac{d\psi_c}{dt} \Big| * \frac{2}{3} a^2 \end{cases}$$

$$\frac{2}{3}(u_a + au_b + a^2 u_c) = \frac{2}{3}(i_a + ai_b + ai_c^2)R + \frac{d}{dt}(\psi_a + a\psi_b + a^2\psi_c)$$

$$\bar{u}_s = \bar{i}_s R + \frac{d}{dt} \bar{\psi}_s$$

Уравнения асинхронной машины в обобщённой системе координат:

$$\bar{U}_{sp} = \bar{i}_{sp} \cdot R_s + e^{-j\gamma} \cdot \frac{d\bar{\psi}_{sp} \cdot e^{j\gamma}}{dt} \iff \bar{U}_{sp} = \bar{i}_{sp} \cdot R_s + \frac{d\bar{\psi}_{sp}}{dt} + \bar{\psi}_{sp} \cdot j \cdot \omega_x; \text{ - уравнение}$$

статора в векторной форме;

$$\bar{U}_{rp} = \bar{i}_{rp} \cdot R_r + \frac{d\bar{\psi}_{rp}}{dt} + \bar{\psi}_{rp} \cdot j(\omega_x - \omega) \text{ - уравнение ротора в векторной форме;}$$

Выше представлен вывод уравнений асинхронной машины в векторной форме, для уравнений контура токов статора. Система уравнений представляет собой систему уравнений контуров трех фаз асинхронной машины. Здесь записаны уравнения асинхронной машины в обобщенной координатной системе в векторной форме. Для этого, как говорилось ранее необходимо умножить соответствующие величины на $e^{-j\gamma}$. Здесь показан данный переход на примере уравнения статорного контура в векторной форме, которое было получено ранее. Выражения для

контуров ротора приведены без вывода. Следует отметить особенность этих уравнений, которая состоит в появлении в уравнениях э.д.с. вращения в явной форме. Это объясняется тем, что преобразование уравнений к одной системе координат автоматически преобразует модель машины с взаимно перемещающимися обмотками к модели с неподвижными относительно друг друга обмотками.

Ниже приведены уравнения асинхронного двигателя в проекциях на оси x и y . Их можно получить, как говорилось выше, спроецировав изображающие вектора соответствующих величин на координатные оси x и y . Представленные уравнения записаны относительно потокосцеплений контуров статора и ротора.

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{x1} = R_1 i_{x1} + \frac{d\psi_{x1}}{dt} - \omega_x \psi_{y1} \\ U_{y1} = R_1 i_{y1} + \frac{d\psi_{y1}}{dt} + \omega_x \psi_{x1} \\ 0 = R_2 i_{x2} + \frac{d\psi_{x2}}{dt} - (\omega_x - \omega) \psi_{y2} \\ 0 = R_2 i_{y2} + \frac{d\psi_{y2}}{dt} + (\omega_x - \omega) \psi_{x2} \end{array} \right. \quad \text{- математическая модель АД в проекциях на}$$

оси Ox и Oy .

Выражения для потокосцеплений статорных и роторных контуров имеют соответственно вид:

$$\begin{array}{l} \psi_{x1} = x_{11} i_{x1} + x_m i_{x2} \\ \psi_{x2} = x_{22} i_{x2} + x_m i_{x1} \end{array} ; \quad \begin{array}{l} \psi_{y1} = x_{11} i_{y1} + x_m i_{y2} \\ \psi_{y2} = x_{22} i_{y2} + x_m i_{y1} \end{array} ;$$

где:

U_{x1}, U_{y1} - напряжение, приложенное к обмотке статора по оси x и y соответственно;

R_1, R_2 - активное сопротивление обмотки статора и ротора соответственно;

$i_{x1}, i_{y1}, i_{x2}, i_{y2}$ - токи контура статора по оси x и y , а так же контура ротора по осям x и y ;

$\psi_{x1}, \psi_{y1}, \psi_{x2}, \psi_{y2}$ - потокосцепления контура статора и ротора по соответствующим осям;

ω_x - частота вращения координатной системы;

ω - частота вращения ротора;

x_{11}, x_{22} - собственное индуктивное сопротивление контура статора и ротора;

x_m - сопротивление взаимоиנדукции между контурами статора и ротора.

Выражения для напряжений приложенных к контуру статора по осям Ox и Oy в обобщенной системе координат для напряжение в системе координат, вращающихся с произвольной частотой, представлены ниже:

$$U_{x1} = U_{1m} \cos[(\omega_1 - \omega_x)\tau + \alpha_0]$$

$$U_{y1} = U_{1m} \sin[(\omega_1 - \omega_x)\tau + \alpha_0]$$

где α_0 - начальный сдвиг фаз.

Выражения токов статора и ротора можно получить соответственно из выражений для потокосцеплений:

$$i_{x1} = \frac{1}{x_{11}'} (\psi_{x1} - k_2 \psi_{x2}); i_{y1} = \frac{1}{x_{11}'} (\psi_{y1} - k_2 \psi_{y2}); i_{x2} = \frac{1}{x_{22}'} (\psi_{x2} - k_1 \psi_{x1}); i_{y2} = \frac{1}{x_{22}'} (\psi_{y2} - k_1 \psi_{y1})$$

$$\text{где } x_{11}' = x_{11}\sigma; x_{22}' = x_{22}\sigma; \sigma = 1 - \frac{x_m^2}{x_{11}x_{22}}; k_1 = \frac{x_m}{x_{11}}; k_2 = \frac{x_m}{x_{22}}.$$

При анализе различных режимов работы электрических машин, особенно при теоретических исследованиях переходных процессов, пользуются относительными единицами. Применение относительных единиц связано с рядом преимуществ:

1. Система уравнений электрической машины более проста по виду;
2. Расчеты ведутся с числами, близкими к единице, что особенно важно при использовании вычислительной техники;
3. Облегчается контроль над правильностью расчета;
4. Упрощаются сравнение поведения электрических машин в различных режимах работы, сравнение машин различных мощностей и типов.

Появляется возможность установить общие закономерности поведения электрических машин в переходных режимах;

5. Многие различные по своей сути физические величины выражаются одним и тем же числом. Например, зависимости напряжения, потокосцепления, потока, индукции в воздушном зазоре машины от МДС или тока возбуждения выражаются одной и той же кривой. В системе о.е. производная по времени одновременно является производной по текущему углу вращения ротора. Индуктивные сопротивления, коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции выражаются одними и теми же числами. С учетом всего вышесказанного запишем уравнения асинхронной машины в обобщенной системе координат в относительных единицах в форме Коши. Запись уравнений в форме Коши необходимо для решения данной системы численными методами:

$$\begin{cases} \frac{d\psi_{x1}}{d\tau} = U_{x1} - \alpha_1' \dot{\psi}_{x1} + \omega_x \psi_{y1} + k_2 \alpha_1' \dot{\psi}_{x2} \\ \frac{d\psi_{y1}}{d\tau} = U_{y1} - \alpha_1' \dot{\psi}_{y1} - \omega_x \psi_{x1} + k_2 \alpha_1' \dot{\psi}_{y2} \\ \frac{d\psi_{x2}}{d\tau} = -\alpha_2' \dot{\psi}_{x2} + (\omega_x - \omega) \psi_{y2} + k_1 \alpha_2' \dot{\psi}_{x1} \\ \frac{d\psi_{y2}}{d\tau} = -\alpha_2' \dot{\psi}_{y2} - (\omega_x - \omega) \psi_{x2} + k_1 \alpha_2' \dot{\psi}_{y1} \end{cases}$$

Где $\alpha_1' = R_1 / x_{11}'$; $\alpha_2' = R_2 / x_{22}'$;

Наиболее удобно производить математическое моделирование в относительной системе единиц, приведенной ниже:

- За базисные единицы напряжения и тока принимаются амплитуды фазных номинальных величин соответственно в вольтах и амперах:

$$U_{\bar{\sigma}} = E_{\bar{\sigma}} = U_{m_{НОМ}}, \quad I_{\bar{\sigma}} = I_{m_{НОМ}}$$

- За базисную единицу мощности принимается номинальная полная мощность всех фаз статора в ваттах:

$$P_{\bar{\sigma}} = m \cdot U_{НОМ} \cdot I_{НОМ} = \frac{m}{2} \cdot U_{m_{НОМ}} \cdot I_{m_{НОМ}}$$

- За базисную единицу частоты принимается номинальная частота сети в герцах:

$$f_{\bar{\sigma}} = f_{ном}$$

- За базисную единицу угловой частоты принимается:

$$\omega_{\bar{\sigma}} = 2\pi f_{\bar{\sigma}} = \omega_1$$

где ω_1 - синхронная угловая частота, выражаемая в эл. рад.

- За базисную единицу времени принимается время, в течении которого синхронно вращающийся ротор повернется на 1 эл. рад:

$$t_{\bar{\sigma}} = 1 / \omega_{\bar{\sigma}}$$

- За базисную единицу момента принимают момент, создающий базисную мощность при базисной частоте вращения. Базисный момент выражается в Ватт/сек и Ватт/рад:

$$M_{\bar{\sigma}} = P_{\bar{\sigma}} \cdot p \cdot t_{\bar{\sigma}} = (P_{\bar{\sigma}} / \omega_{\bar{\sigma}}) p$$

- За базисную величину сопротивления принимается, Ом:

$$z_{\bar{\sigma}} = \frac{U_{\bar{\sigma}}}{I_{\bar{\sigma}}} = \frac{U_{ном}}{I_{ном}}$$

- За базисную величину индуктивности принимается, Гн:

$$L_{\bar{\sigma}} = z_{\bar{\sigma}} / \omega_{\bar{\sigma}}$$

- За базисную единицу потокосцепления принимается потокосцепление, индуцирующее в обмотке статора базисное напряжение при базисной угловой частоте:

$$\psi_{\bar{\sigma}} = U_{\bar{\sigma}} / \omega_{\bar{\sigma}} = L_{\bar{\sigma}} \cdot I_{\bar{\sigma}}$$

Ниже представлены выражения электромагнитной мощности и момента для обобщенной системы координат. Необходимо заметить, что электромагнитный момент и мощность инвариантны по отношению к выбору системы координат, а их выражения имеют представленный вид:

$$P_{эм} = \omega(\psi_{y2}i_{x2} - \psi_{x2}i_{y2}); P_{эм} = \frac{k_1}{x_{22}}\omega(\psi_{x2}\psi_{y1} - \psi_{x1}\psi_{y2}); P_{эм} = \frac{k_2}{x_{11}}\omega(\psi_{x2}\psi_{y1} - \psi_{x1}\psi_{y2});$$

$$M_{эм} = \frac{P_{эм}}{\omega} = \frac{k_1}{x_{22}}(\psi_{x2}\psi_{y1} - \psi_{x1}\psi_{y2});$$

Для исследования электромеханических процессов асинхронной машины, необходимо систему уравнений в проекциях на оси обобщенной координатной системы дополнить уравнением движения:

$$M_{эм} = J \frac{d\Omega}{dt} + M_c \left| \frac{1}{M_\phi} = \frac{\Omega_\phi}{P_\phi} \right.$$

где $m_{эм} = \frac{J\Omega_\phi}{P_\phi} \frac{d\Omega}{dt} + m_c$, $m_{эм}, m_c$ - в относительных единицах; или

$m_{эм} = T_j \frac{d\omega}{d\tau} + m_c$, где $T_j = \frac{J\omega_\phi^3}{P^2 P_\phi}$ - инерционная постоянная.

Из чего следует, что электромагнитный момент создаваемый электрической машиной уравновешивается динамическим моментом и моментом сопротивления нагрузки. Таким образом, расчетная модель асинхронной машины в обобщенной системе координат представляет собой систему пяти уравнений, в состав которой входят четыре уравнения электрических контуров статора и ротора, записанных по второму закону Кирхгофа и уравнения движения. Ниже представлено уравнение движения и полная система дифференциальных уравнений асинхронной машины в обобщенной системе координат, записанная в относительных единицах и решаемая относительно потокосцеплений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi_{x1}}{d\tau} = U_{x1} - \alpha_1 \dot{\psi}_{x1} + \omega_x \psi_{y1} - k_2 \alpha_1 \dot{\psi}_{x2} \\ \frac{d\psi_{y1}}{d\tau} = U_{y1} - \alpha_1 \dot{\psi}_{y1} - \omega_x \psi_{x1} + k_2 \alpha_1 \dot{\psi}_{y2} \\ \frac{d\psi_{x2}}{d\tau} = -\alpha_2 \dot{\psi}_{x2} + (\omega_x - \omega) \psi_{y2} + k_1 \alpha_2 \dot{\psi}_{x1} \\ \frac{d\psi_{y2}}{d\tau} = -\alpha_2 \dot{\psi}_{y2} - (\omega_x - \omega) \psi_{x2} + k_1 \alpha_2 \dot{\psi}_{y1} \\ \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{1}{T_j} (m_{эм} - m_c) \end{array} \right.$$

В общем случае это система нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Из данной системы уравнений можно получить систему уравнений в любой из рассмотренных ранее координатных систем (статора, ротора, и синхронно вращающейся), подстановкой соответствующей частоты вращения координатной системы. Графическое изображение модели асинхронного двигателя в осях x и y представлена на рисунке 25.

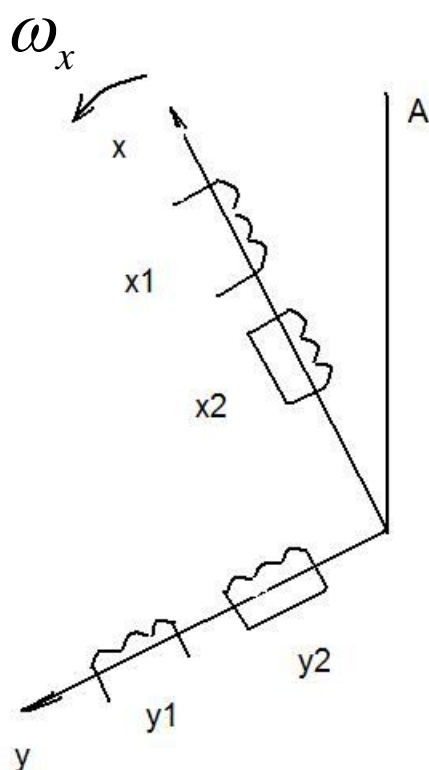


Рисунок 25 Расчетная модель АД в обобщенной системе координатной системе

Раздел 4.2 Моделирование прямого пуска асинхронного двигателя

Раздел 4.2.1 Пуск АД в координатах статора (α, β)

Так как АД обладает равномерным воздушным зазором и симметричными обмотками, то его уравнения во всех рассмотренных координатных системах являются обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Для их решения могут использоваться одни и те же методы. Выбор метода производится из удобства решения конкретной задачи и симпатии автора.

Пуск асинхронного двигателя разбивается на два этапа, как и для пуска двигателя постоянного тока, рассмотренного выше. Первым этапом является: режим короткого замыкания, начинающийся с момента подачи напряжения на обмотку статора, до момента начала вращения статора (момента троганья). На данном этапе протекающие процессы являются электромагнитными, т.к. механическое движение отсутствует. Математическая модель представляет собой обыкновенную систему дифференциальных уравнений с нулевыми начальными условиями. Целью расчета математической модели является определение начальных условий для второго этапа – разгона двигателя.

Порядок расчета первого двигателя:

- Задаётся время расчёта от 0 до некоторого значения t .
- Решаются уравнения электрического равновесия. Определяются зависимости потокосцеплений от t .
- По выражению электромагнитного момента, зная потокосцепления, определяется зависимость момента от t .
- Для заданного момента нагрузки по осциллограмме момента находится время начала вращения.
- По осциллограммам потокосцеплений для найденного значения времени определяются значения потокосцеплений в момент трогания.

Второй этап – разгон двигателя продолжается с момента начала вращения ротора, до выхода двигателя на установившийся режим работы. Характер переходного процесса – электромеханический. Математическая модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с ненулевыми начальными условиями.

Порядок расчета второго этапа:

- Задаётся время расчёта от времени трогания до некоторого значения, определяемого длительностью переходного процесса.
- Используя, полученные из режима к.з. значения потокосцеплений как начальные условия, решаются уравнения электромеханического процесса. В результате находятся зависимости потокосцеплений и скорости от времени.
- По зависимостям потокосцеплений рассчитывается электромагнитный момент и токи в обмотках модели.
- Выполняется переход к реальным токам.

На рисунке 26 приведена модель АД в осях статора. Соответствующая ей выражения для токов и напряжений записаны ниже, данные выражения получены из аналогичных выражений для математической модели в обобщенной системе координат, путем подстановки соответствующей частоты вращения координатной системы:

$$U_{\alpha 1} = U_{1m} \cos[\omega_1 \tau + \alpha_0]; \quad U_{\beta 1} = U_{1m} \sin[\omega_1 \tau + \alpha_0]; \quad i_a = i_\alpha; \quad i_b = 0,5(\sqrt{3}i_\beta - i_\alpha);$$
$$i_c = -0,5(\sqrt{3}i_\beta + i_\alpha);$$

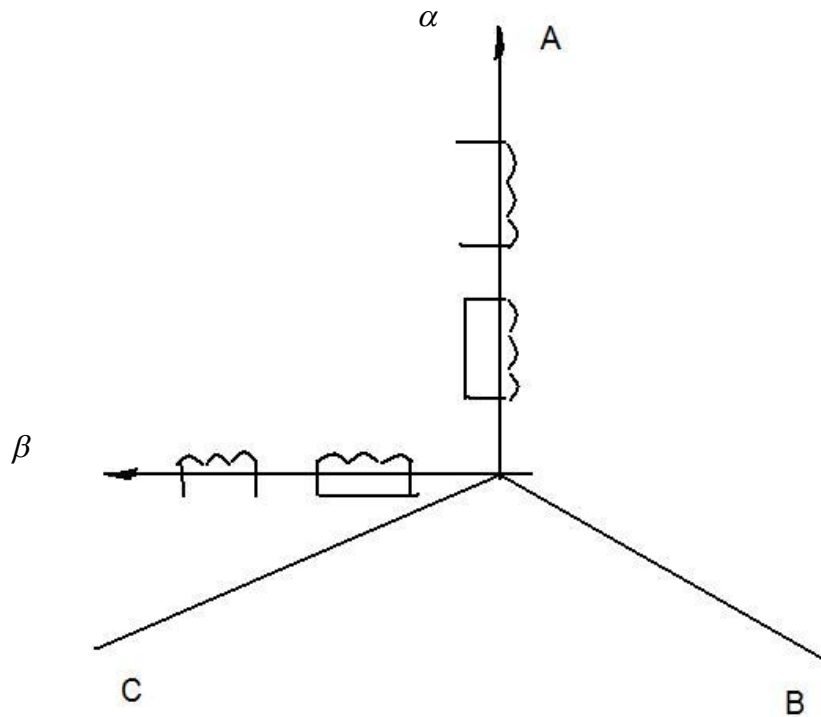


Рисунок 27 Координатная система статора

Данная координатная система представляет собой систему неподвижных обмоток попарно расположенных по осям α, β . К обмоткам подводится напряжение частоты сети - ω_1 и по обмоткам протекают токи $i_{\alpha s}, i_{\beta s}, i_{\alpha r}, i_{\beta r}$, представляющие собой проекции изображающих векторов статора и ротора на оси координат. Из модели следует, что токи короткозамкнутых контуров имеют постоянную частоту - ω_1 при любой скорости ротора. Здесь же представлены соотношения, связывающие реальные фазные токи с переменными в осях α, β . Математическая модель АД в осях статора представлена ниже:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi_{\alpha 1}}{d\tau} = U_{\alpha 1} - \alpha_1 \dot{\psi}_{\alpha 1} - k_2 \alpha_1 \dot{\psi}_{\alpha 2} \\ \frac{d\psi_{\beta 1}}{d\tau} = U_{\beta 1} - \alpha_1 \dot{\psi}_{\beta 1} + k_2 \alpha_1 \dot{\psi}_{\beta 2} \\ \frac{d\psi_{\alpha 2}}{d\tau} = -\alpha_2 \dot{\psi}_{\alpha 2} - \omega \psi_{\beta 2} + k_1 \alpha_2 \dot{\psi}_{\alpha 1} \\ \frac{d\psi_{\beta 2}}{d\tau} = -\alpha_2 \dot{\psi}_{\beta 2} + \omega \psi_{\alpha 2} + k_1 \alpha_2 \dot{\psi}_{\beta 1} \\ \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{1}{T_j} \left(\frac{k_2}{x_{11}} (\psi_{\alpha 2} \dot{\psi}_{\beta 1} - \dot{\psi}_{\alpha 1} \psi_{\beta 2}) - m_c \right) \end{array} \right.$$

Они получаются из общих уравнений подстановкой в них $\omega_x = 0$. Уравнения представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, решение которых осуществляется численными методами. Решение уравнений приведено в виде осциллограмм на рисунках 28-33. На рисунке 30 изображены токи ротора, существующие в реальных обмотках, расположенных на вращающемся роторе. На графиках видно, что токи ротора имеют частоту скольжения. На рисунке 32 изображены статическая и динамическая характеристики асинхронного двигателя. Разгон двигателя происходит по динамической характеристике и только в установившемся режиме рабочая точка фиксируется на статической характеристике. Такой вид динамической характеристики объясняется наличием пульсаций момента при скорости меньше критической как это видно на слайде № 76. Эти пульсации момента вызывают пульсацию скорости. Осциллограмма скорости приведена на слайде № 77.

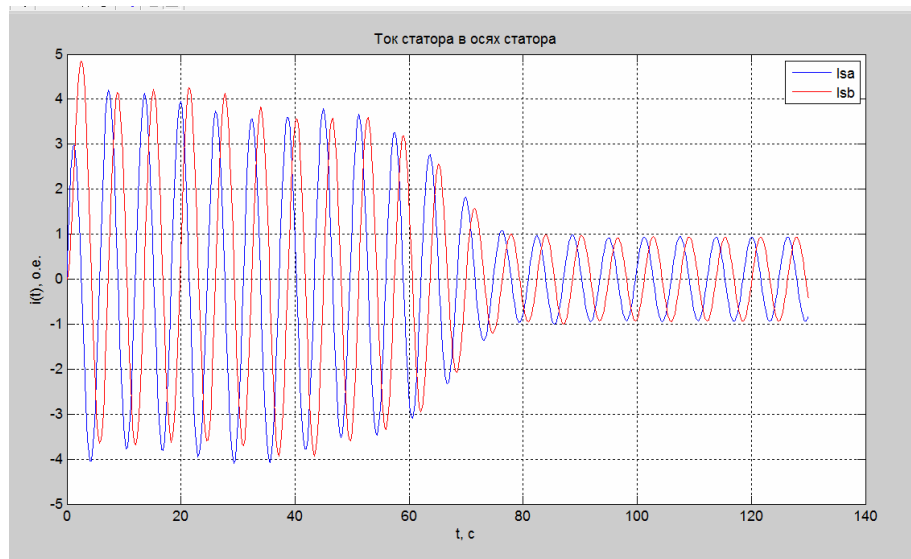


Рисунок 28 Ток статора в осях статора

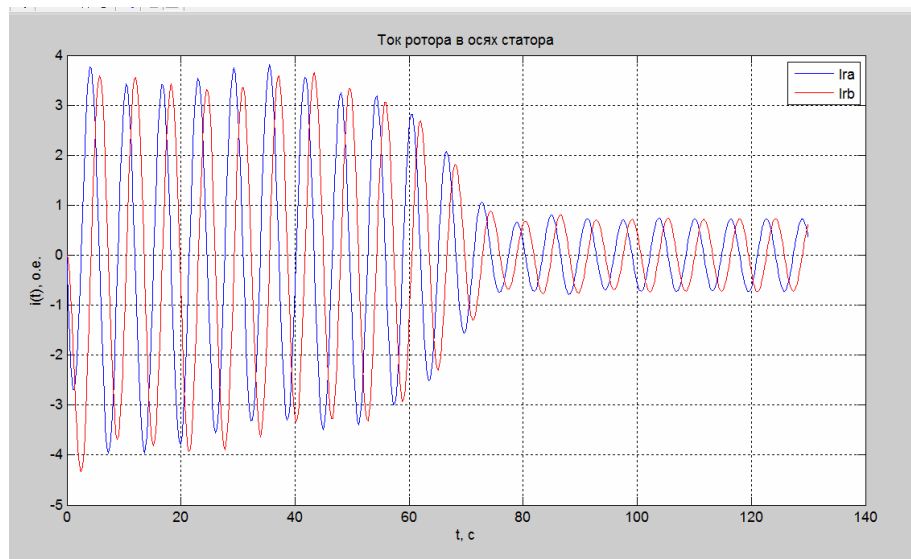


Рисунок 29 Ток ротора в осях статора

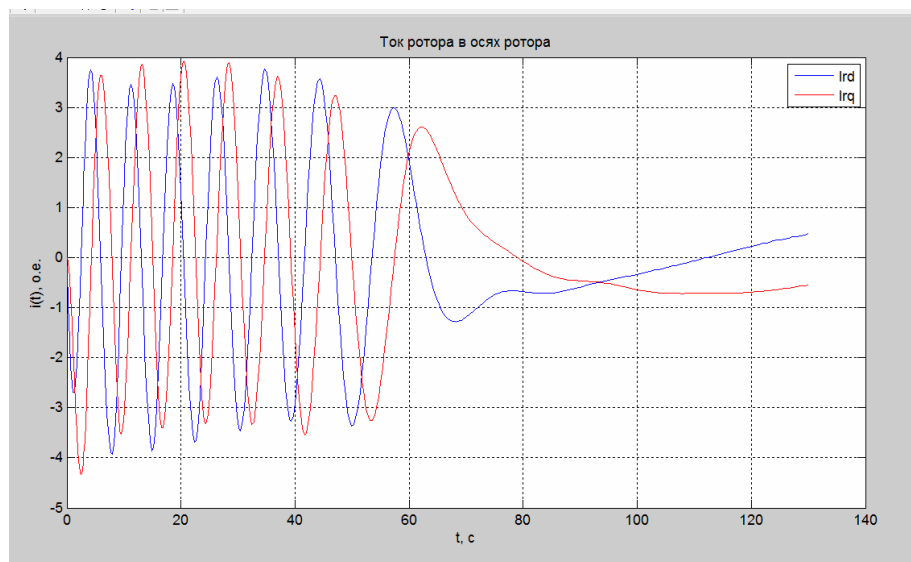


Рисунок 30 Ток ротора в осях ротора

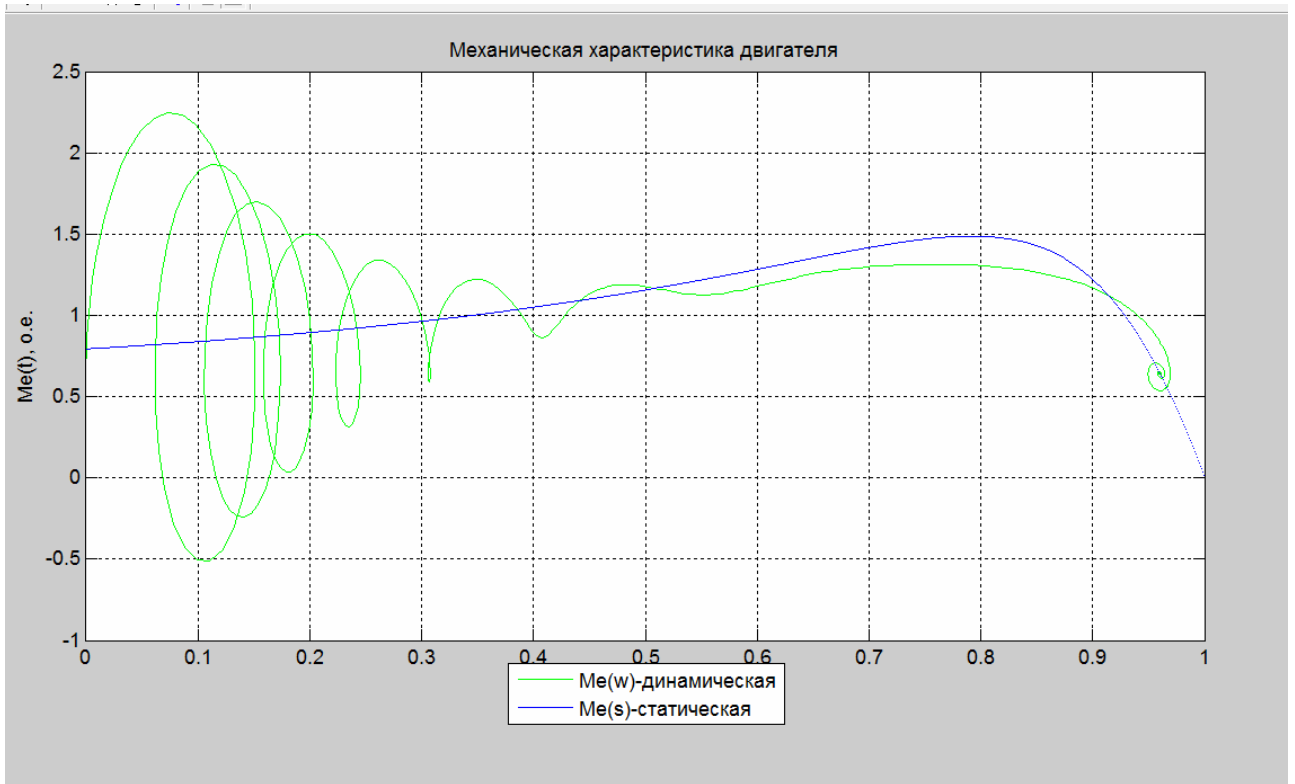


Рисунок 31 Статическая и динамическая механическая характеристика асинхронного двигателя

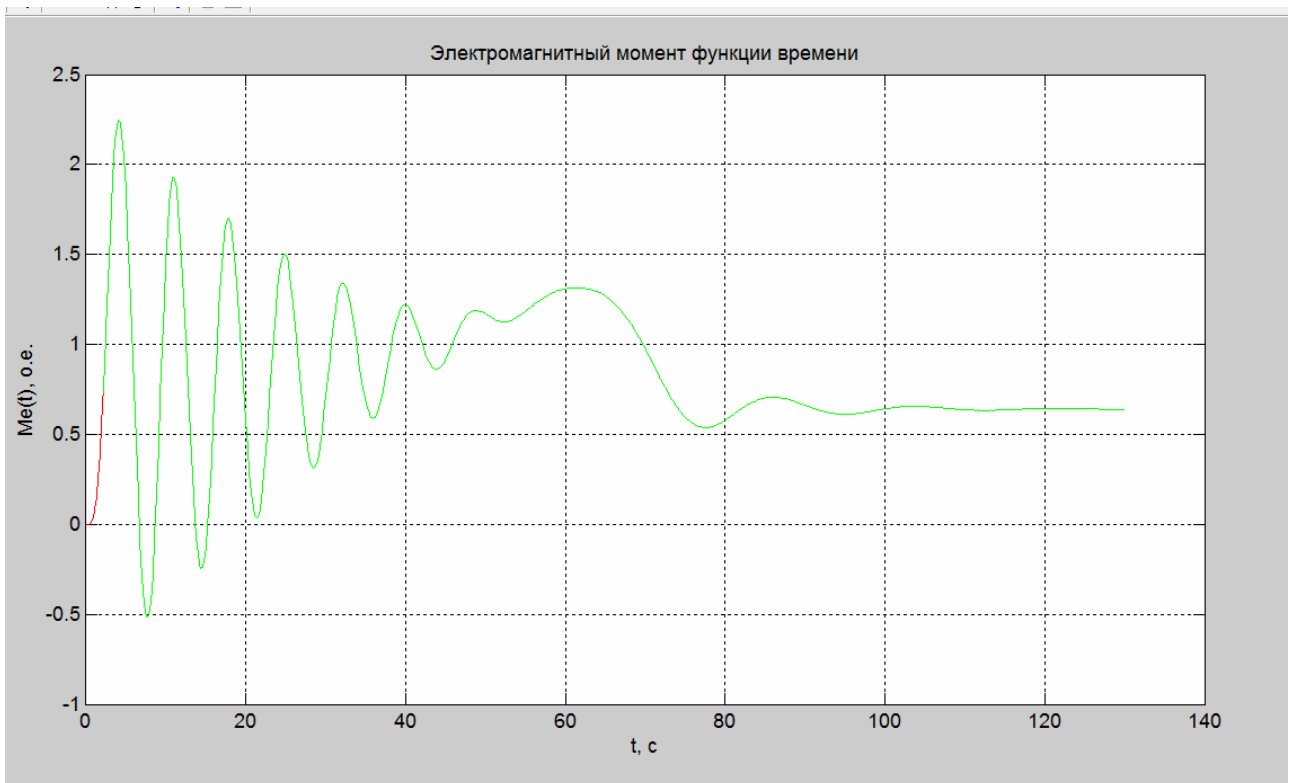


Рисунок 32 Осциллограмма электромагнитного момента

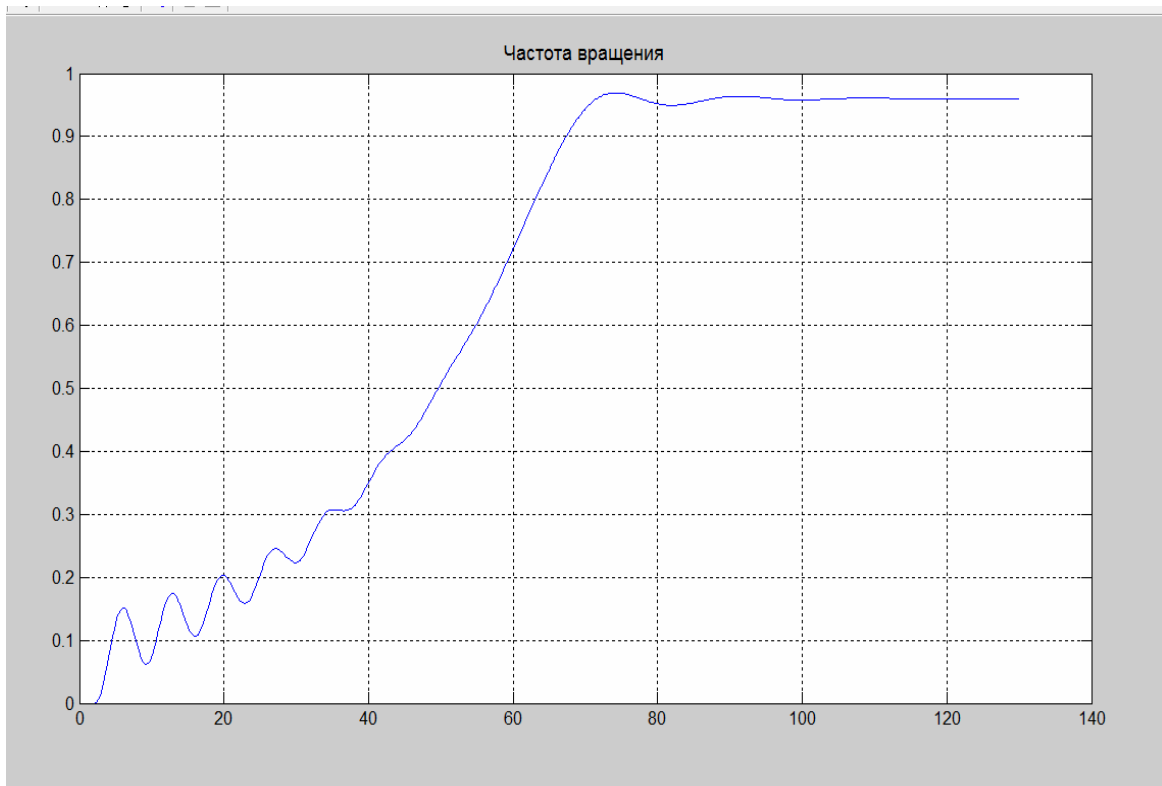


Рисунок 33 Осциллограмма частоты вращения ротора

Пуск АД в координатах статора u, v .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi_{u1}}{d\tau} = U_{u1} - \alpha_1 \dot{\psi}_{u1} + \omega_1 \psi_{v1} - k_2 \alpha_1 \dot{\psi}_{u2} \\ \frac{d\psi_{v1}}{d\tau} = U_{v1} - \alpha_1 \dot{\psi}_{v1} - \omega_1 \psi_{u1} + k_2 \alpha_1 \dot{\psi}_{v2} \\ \frac{d\psi_{u2}}{d\tau} = -\alpha_2 \dot{\psi}_{u2} + (\omega_1 - \omega) \psi_{v2} + k_1 \alpha_2 \dot{\psi}_{u1} \text{ - расчётная модель в осях } u, v \\ \frac{d\psi_{v2}}{d\tau} = -\alpha_2 \dot{\psi}_{v2} - (\omega_1 - \omega) \psi_{u2} + k_1 \alpha_2 \dot{\psi}_{v1} \\ \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{1}{T_j} \left(\frac{k_2}{x_{11}} (\psi_{v1} \psi_{u2} - \psi_{u1} \psi_{v2}) - m_c \right) \end{array} \right.$$

Расчетная модель представляет собой четыре неподвижных друг относительно друга обмоток, вращающихся в пространстве со скоростью - ω_1 . При этом первичные обмотки питаются постоянным напряжением и, следовательно, по обмоткам модели протекают постоянные токи. На рисунке 34 представлена математическая модель АД в синхронно вращающихся осях.

Она получается как частный случай общих уравнений подстановкой в них $\omega_x = \omega_1$. Решение этих уравнений также осуществляется численными методами. Решение для момента и скорости полностью совпадают с решениями, полученными в предыдущем случае, так как они не зависят от используемой системы координат, а осциллограммы токов приведены на рисунках 35-36.

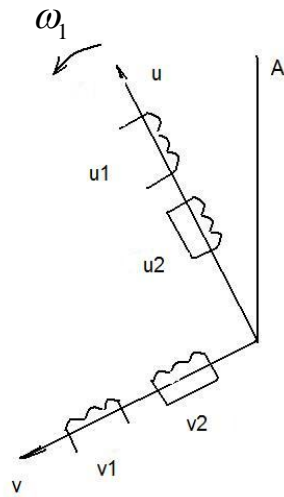


Рисунок 34 Синхронно вращающаяся координатная система

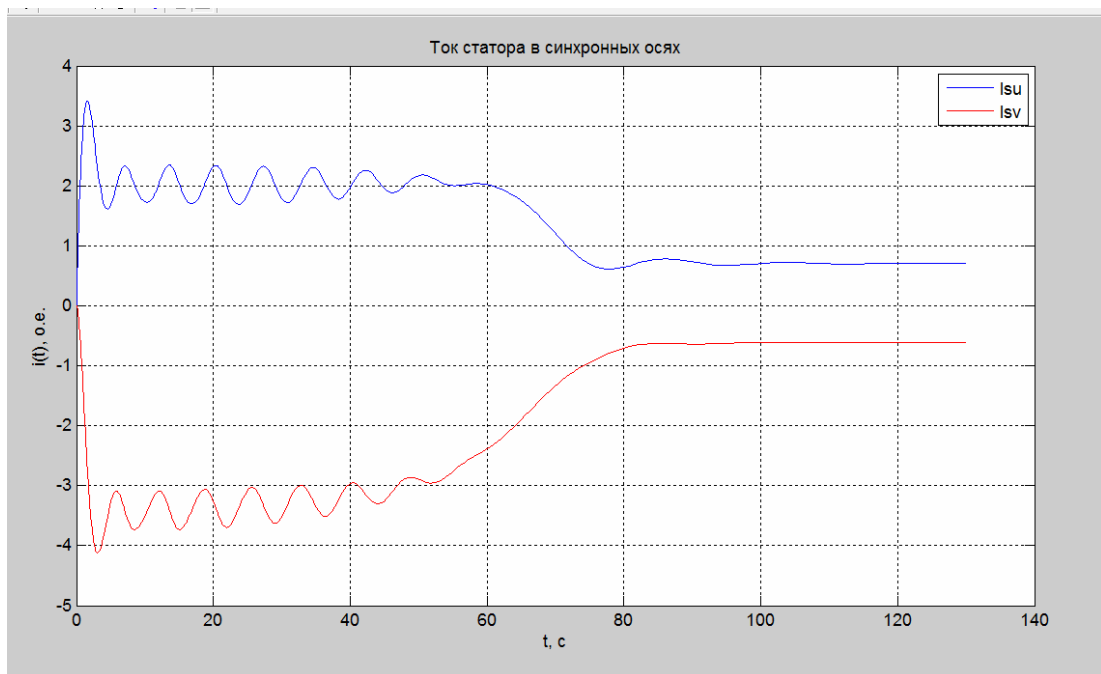


Рисунок 35 Ток статора в синхронно вращающихся координатных осях

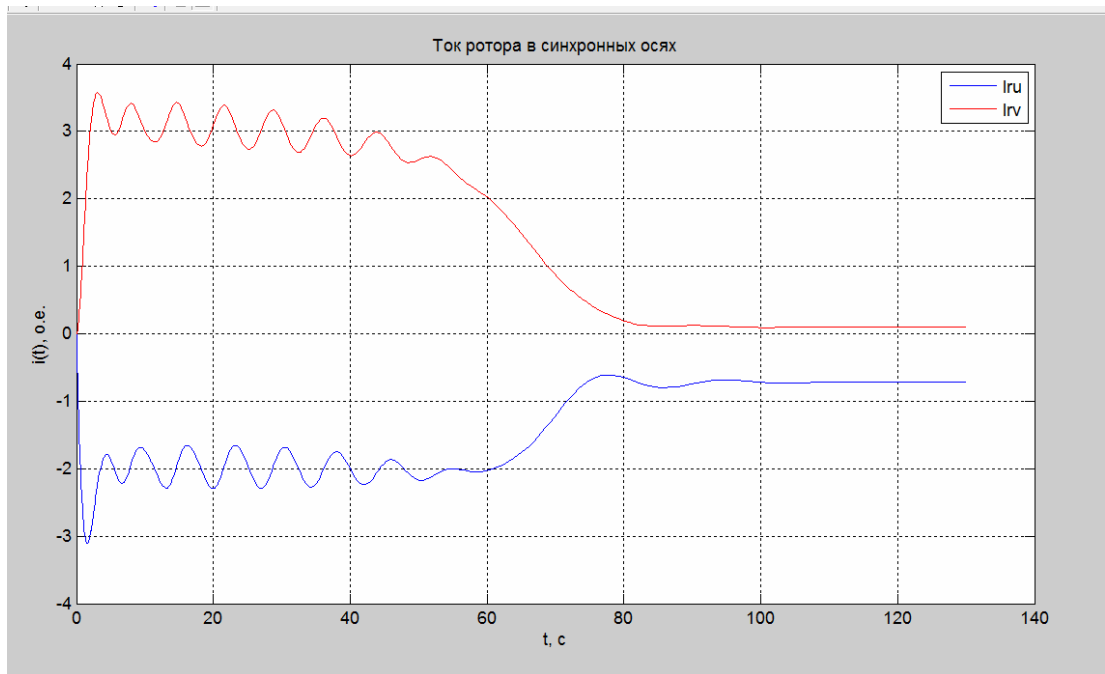


Рисунок 36 Ток ротора в синхронно вращающихся осях